

5.6.3 *I rischi nell'utilizzo di basi GPS permanenti*

La vasta copertura del territorio nazionale da parte delle reti di stazioni permanenti ha fatto sì che i rilievi eseguiti in modalità NRTK in appoggio a tali reti siano ormai diventati lo standard per la tipologia di lavori trattati in questo libro. Come dicevo al precedente paragrafo *Stazione virtuale (VRS)* a pag. 392, ho riscontrato che molti tecnici dedicati a questo genere di rilievi non applicano la tecnica di portarsi la base GPS in locale (virtuale) sfruttando l'apposita prestazione messa a disposizione dalle stesse reti di stazioni permanenti. Al contrario, lasciano la base GPS nella sua posizione originaria anche quando questa si trova a 20-30 km dall'oggetto del rilievo. Adottano questa scelta per sfruttare il vantaggio di avere tutti i rilievi eseguiti nella loro zona di intervento riferiti alla stessa base GPS, come se si trattasse di un unico grande rilievo che li comprende tutti. In questo modo, da tale grande rilievo univoco possono, ad esempio, utilizzare le baseline ai PF di un precedente rilievo⁴¹ portandosele direttamente nel nuovo rilievo che stanno eseguendo. Dal punto di vista formale questo approccio non fa una piega: se la base GPS è la stessa, tutti i punti connessi a quella base fanno parte di un unico grande rilievo anche se in realtà sono stati rilevati in epoche diverse⁴². Come accennato al succitato paragrafo, il problema nasce quando la base è a 20 o 30 km dall'oggetto del rilievo.

Qual è il problema?

È che il GPS è un sistema geodetico valido per l'intero pianeta (con origine nel centro della terra), mentre nei rilievi di nostro interesse noi agiamo sul "piano topografico", tant'è che in questo ambito le coordinate vengono chiamate "coordinate topografiche piane". Nel sistema globale del GPS la base può essere anche a 100 km dal punto in cui siamo senza che ciò comporti alcuna imprecisione nella baseline che la connette al punto stesso. Quest'ultima, infatti, è data semplicemente dai tre delta di coordinate X-Y-Z mostrati in Figura 264 a pag. 377, cioè dalle differenze di coordinate cartesiane tra il punto e la base, e queste coordinate sono riferite al centro della terra sia per il punto che per la base. Non c'è quindi alcuna imprecisione dovuta alla distanza base-punto. Quando invece passiamo dal sistema geodetico GPS al piano topografico, le cose cambiano.

41 Oppure i punti di inquadramento per la ricostruzione di confini cartografici.

42 E già qui ci sarebbe da mettere nel conto le eventuali correzioni della rete stessa che possono comportare differenze di posizione, sia pur contenute, da una data all'altra.

Il piano sul quale portiamo i punti è appunto un “piano”, ed è tangente all’ellissoide proprio nella base GPS del rilievo da cui si dipartono le baselines, cioè nel cosiddetto “punto di emanazione del rilievo”. L’espedito di portarsi dall’ellissoide ad un piano risponde all’ovvia esigenza di facilitare i calcoli ed è reso possibile dal fatto che, entro un’estensione limitata, la superficie curva dell’ellissoide può effettivamente essere assimilata, con buona approssimazione, ad un piano. Ma attenzione, ho scritto “entro un’estensione limitata”, il che in topografia si legge “campo topografico”, considerato in generale di ampiezza massima pari a 15 km. Ora, quello che succede passando dal sistema GPS al piano topografico l’ho spiegato al paragrafo 5.6.1 *Concetti base sul sistema WGS84 del GPS* parlando della trasformazione euleriana illustrata in Figura 266 (in basso) a pag. 379 e seguenti. Gli assi cartesiani geocentrici vengono, sì, portati a coincidere con quelli del piano topografico, ma se la base è a 30 km rimane a 30 km.

Cosa comporta avere la base GPS a 30 km?

Guardiamo l’esempio illustrato in Figura 274 dall’immagine presa da Google Earth di due distinti rilievi eseguiti nella mia zona. Come si vede, non sono molto lontani tra loro, solo 2.7 km in linea retta considerando i baricentri dei punti rilevati. La base GPS invece è molto distante, a circa 30 km.



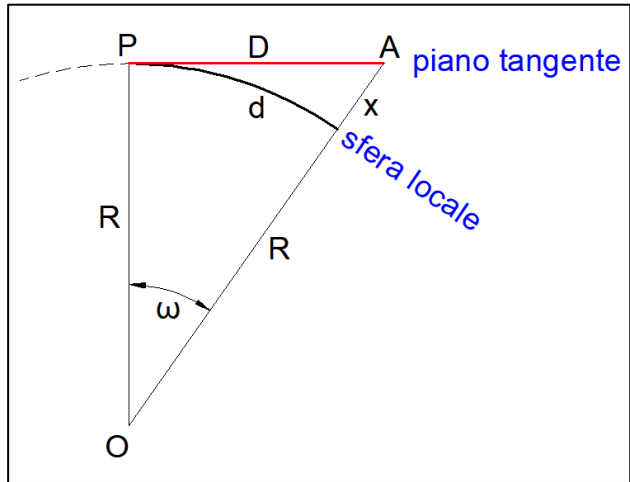
Figura 274 - In alto a sinistra le aree di due distinti rilievi posti ad una distanza tra loro (dai rispettivi baricentri) di 2.7 km. In basso a destra la base GPS della rete ubicata a 30 km dai rilievi.

Bene, ora torniamo per un attimo a scuola di geometra 😊. La Figura 275 riproduce lo schema dell'errore di sfericità terrestre. Come si può notare, anziché riprodurre l'ellissoide già visto, qui si parla di "sfera locale". Si tratta di un altro livello di semplificazione adottato dai geodeti (e dai topografi) per il quale, entro un raggio di 100 km, la superficie ellissoidica può essere assimilata ad una sfera, facilitando così i calcoli da compiere. La legenda di Figura 275 indica le grandezze in gioco e, a seguire, sono riportate le formule matematiche che le mettono in relazione, mentre la Tabella 9 presenta i calcoli per alcuni valori di distanza.

Figura 275 -

Lo schema dell'errore di sfericità terrestre alla base del concetto di "campo topografico" entro il quale la superficie sferica può essere assimilata ad un piano tangente. *Legenda:*

- O = centro della sfera
- ω = angolo al centro (rad.)
- R = raggio medio terrestre assunto pari a 6377 km
- d = distanza sferica
- D = distanza sul piano
- x = differenza di quota



$$\omega = \arctan \frac{D}{R} = \frac{d}{R} \qquad d = R \omega \qquad D = \overline{PA} = R \tan \omega \qquad x = \frac{D^2}{2R}$$

Tabella 9 - L'errore planimetrico e altimetrico dovuto all'assunzione del piano topografico al posto della sfera locale.

d (m)	ω (rad)	D (m)	X (m)
10 000	0.001568135	10 000.008	7.841
20 000	0.003136271	20 000.066	31.363
25 000	0.003920339	25 000.128	49.005
30 000	0.004704406	30 000.221	70.567
35 000	0.005488474	35 000.351	96.050

Come possiamo notare, l'errore altimetrico è relevantissimo (è già significativo a poche centinaia di metri). Ma non è un problema perché viene corretto proprio con la formula x riportata sopra. Quello planimetrico è invece molto contenuto, ma nell'esempio dei due rilievi di Figura 274, con la base a 30 km, è comunque di 22 cm. Di questa questione abbiamo discusso ampiamente sul forum del sito www.topgeometri.it⁴³, dove i colleghi che operano lasciando la base distante sostenevano che tale errore è più o meno lo stesso per tutti i punti e in entrambi i rilievi, visto che sono tutti ubicati dalla stessa parte della base e abbastanza vicini tra loro. Questa è una considerazione corretta, tuttavia mi domando:

Possiamo tenerci errori assoluti di 22 cm?

Lascio la risposta a ciascuno di voi che leggete. Personalmente, la mia valutazione è la seguente: è evidente che l'errore planimetrico è pressoché lo stesso tra un punto e l'altro di ciascun rilievo e cambia di poco anche tra un rilievo e l'altro. Tuttavia rimane il fatto che i punti vengono collocati 22 cm più distanti dalla base di quanto non lo siano nella realtà. Questo, a mio avviso, è già un motivo valido per rispondere negativamente alla domanda di cui sopra, nel senso che dico:

Perché devo introdurre questa incongruenza quando posso evitarla?

Su come evitarla ci torno più avanti. Qui mi preme mettere in evidenza il fatto che l'irrilevanza dell'errore tra i punti dei due rilievi è tale solo nella situazione come quella dell'esempio che stiamo seguendo, nel quale per l'appunto i due rilievi sono abbastanza vicini tra loro e posti all'incirca nella stessa direzione rispetto alla base GPS. Ma se si trovassero invece su direzioni divaricate e quindi distanti tra loro, l'errore comincerebbe a farsi sentire (senza che il tecnico ne sia nemmeno consapevole). Peggio ancora se i due rilievi si trovano in posizione diametralmente opposta rispetto alla base, perché in questo caso i 22 cm andrebbero a sommarsi e tra i due rilievi l'errore diventerebbe di 44 cm, come indicato in Figura 276 che mostra l'errore nelle diverse reciproche posizioni tra i due rilievi.

43 Chi volesse leggere queste discussioni le trova sul forum di www.topgeometri.it alla sezione (categoria) "Topografia". I topic sono due ed hanno per titolo: 1) *Utilizzo base permanenti di rete* e 2) *Considerazioni topografiche sui rilievi di grande estensione*. Se fate fatica a trovarle (perché nel tempo se ne aggiungono numerose altre), questi sono rispettivamente gli indirizzi (link) da digitare nella barra del browser internet:
<https://forum.topgeometri.it/t/utilizzo-base-permanenti-di-rete/2410>
<https://forum.topgeometri.it/t/considerazioni-topografiche-sui-rilievi-di-grande-estensione/2264>

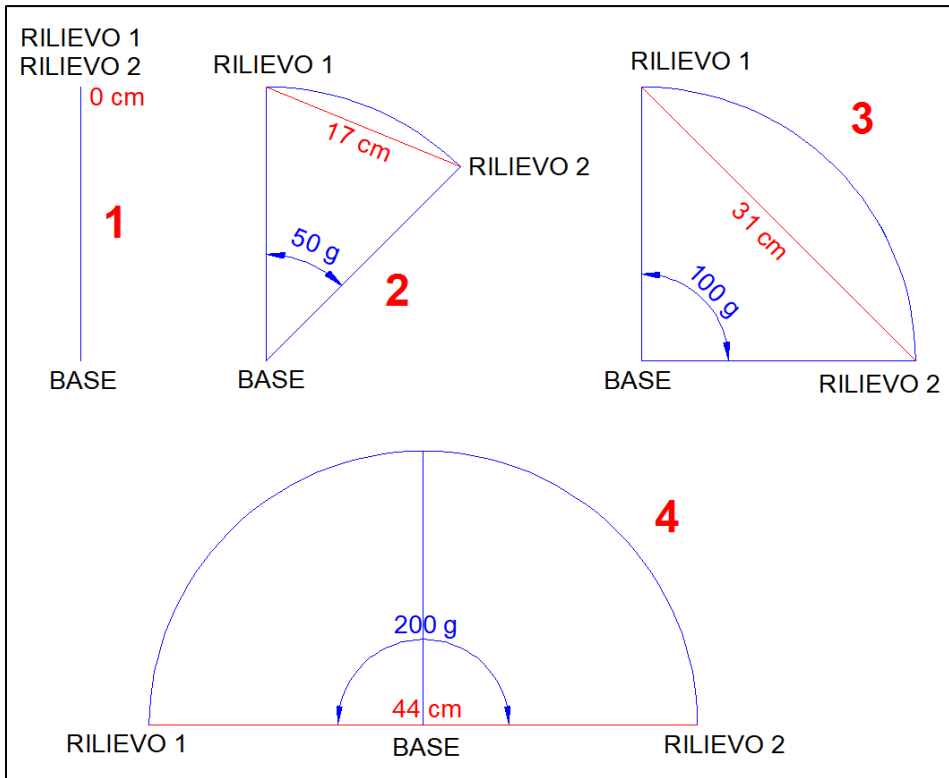


Figura 276 - *L'errore planimetrico tra i punti di due rilievi agganciati alla stessa base GPS distante 30 km, posti nelle diverse direzioni rispetto alla base stessa.*

Quindi, tranne il caso 1 di Figura 276, con i rilievi nella stessa direzione, pensare di poter utilizzare in un rilievo le rilevazioni di un rilievo precedente appoggiato alla stessa base è sbagliato e, come visto, introduce un errore non trascurabile. Ho notato che alcuni colleghi che mantengono la base distante lo fanno per crearsi dei propri macro-rilievi costituiti dall'unione dei singoli rilievi effettivi, pensando che l'appoggiarsi alle basi permanenti sia una garanzia per poter comporre nel tempo una propria "cartografia" del territorio di loro interesse nella quale poter inserire tutti i loro rilievi traendone i benefici già detti. È evidente che la composizione di questi macro-rilievi comporta inevitabilmente il verificarsi di situazioni come quelle dei casi 2, 3 e 4 di Figura 276 e come tale andrebbe evitata. Pensare di ottenere macro-rilievi di estensione pari a qualche decina di km trattandoli come se fossero ancora rappresentabili su un piano (e disegnandoli sul CAD) è un errore concettuale da non commettere.

Quando si esce dal campo topografico bisogna applicare tecniche geodetiche e non più di topografia piana. Anche perché questi macro-rilievi vengono in genere costruiti a partire da più basi permanenti. E qui si manifesta un altro pesante errore che molti tecnici ignorano del tutto. Ed è un errore che si verifica a volte anche nell'ambito dello stesso rilievo quando l'aggancio alla rete passa da una base GPS all'altra per effetto della diversa ubicazione dei punti.

Cosa succede in questi casi?

Con riferimento alla Figura 277, succede che due rilievi agganciati a due diverse basi non sono direttamente comparabili perché i due piani euleriani definiti sui due diversi punti P e Q sono posti nello spazio in modo non immediatamente relazionabile tra loro per i motivi di seguito elencati.

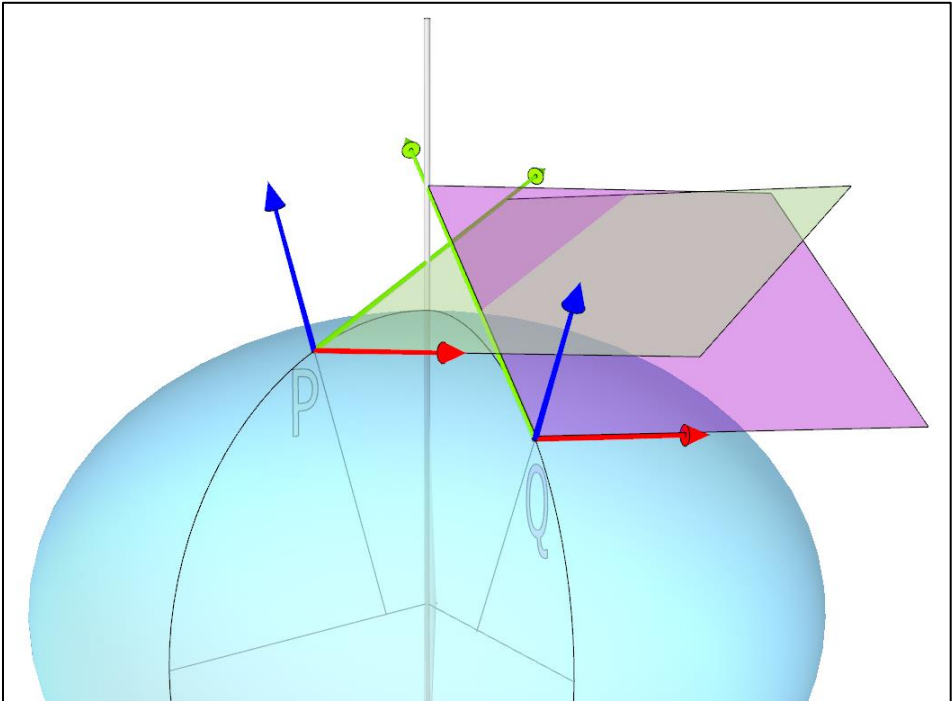


Figura 277 - *I piani tangenti di due diverse basi GPS sono inclinati tra loro e i rispettivi assi Nord (tangenti ai rispettivi meridiani) sono convergenti, non paralleli. Inoltre, essendo che il meridiano è un'ellisse (perché siamo su un ellissoide e non su una sfera), la sua curvatura è variabile, per cui il piano tangente in P non passa alla stessa altezza su Q di quanto il piano tangente su Q passa sopra al punto P.*

1. Gli assi Nord, costituiti dalle tangenti ai rispettivi meridiani di P e Q, non sono paralleli ma convergono;
2. Le due normali all'ellissoide (assi verticali) sono sghembe tra loro, cioè non si incontrano mai, perché i meridiani sono a curvatura variabile e quindi le tangenti (alle quali sono perpendicolari) hanno inclinazione diversa;
3. Sempre per effetto della curvatura variabile dei meridiani, il piano tangente in P non passa alla stessa altezza su Q di quanto il piano tangente su Q passa sopra al punto P.

Cosa significa tutto questo?

Per l'aspetto planimetrico, significa che il punto Q espresso nel sistema topografico di P ha coordinate diverse da quelle che ha il punto P espresso nel sistema topografico di Q. Per l'aspetto altimetrico vale quanto detto sopra al punto 3. Morale: pensare di unire sul piano topografico due rilievi GPS agganciati ad altrettante basi distanti tra loro è un errore grave.

Eppure, facendo assistenza tecnica agli utenti Geocat, mi trovo più di qualche volta di fronte a rilievi appoggiati a due o più basi molto distanti tra loro. Del resto si tratta di un'eventualità non del tutto rara quando ci si trova ad operare in zone equidistanti da due basi permanenti poste in direzioni anche diametralmente opposte. In questi casi può accadere che, quando ci si trova più vicini ad una delle due basi, viene agganciata quella, mentre spostandosi poi in direzione dell'altra base viene agganciata quest'altra⁴⁴. Questa eventualità di basi doppie (o addirittura multiple) di uno stesso rilievo GPS mi ha quindi indotto ad introdurre in Geocat alcune varianti al calcolo proprio per evitare le incongruenze appena illustrate. Infatti, nel caso un rilievo GPS contenga più stazioni, durante il calcolo Geocat trasferisce sulla prima stazione tutte le baseline (ricalcolandole) delle stazioni successive. Il programma mette inoltre a disposizione dell'utente un apposito comando per riportare, anche numericamente, nella tabella del rilievo GPS le baseline come se fossero riferite alla prima stazione. Per i dettagli sul calcolo dei rilievi GPS a più basi, si consulti il paragrafo *Rilievi con basi multiple* a pag. 513.

44 Va detto che questa evenienza è evitabile utilizzando le tecniche di correzione messe a disposizione dalle stesse reti di stazioni permanenti, tecniche che però sono ignorate da molti tecnici e la cui spiegazione esula dagli scopi di questa guida. Per chi volesse prenderne conoscenza, consiglio il corso del sito www.topgeometri.it dal titolo *Topografia-Catasto-Riconfinazioni - Mod. 3 - Rilievi GPS e integrati con TS*.

Naturalmente con questa impostazione di riportare tutto sulla prima base GPS, si corre il rischio di amplificare per contro l'errore di sfericità visto in precedenza. Tuttavia quest'ultimo è da considerarsi il "male minore" tra i due, motivo per cui ho preferito introdurla in Geocat. D'altra parte è evidente che un software non può porre rimedio a errori concettuali o alle carenze di preparazione dell'utilizzatore. L'unico modo per evitarli, o almeno lo spero, possono essere pubblicazioni come questa rivolte agli utilizzatori stessi.

Nella nota 44 a pagina precedente ho accennato alle tecniche correttive rese disponibili dalle reti di stazioni permanenti per aumentare la precisione delle rilevazioni fino a livelli molto spinti. Ne parlo perché, nei dibattiti che abbiamo tenuto sul forum di www.topgeometri.it (si veda la nota 43 a pag. 398), è emerso che alcuni tecnici erano (o sono tuttora) convinti che tali tecniche correggessero anche gli errori di cui vi ho parlato in questo paragrafo.

Niente di più sbagliato!

I metodi correttivi NRTK riguardano sempre e soltanto il sistema satellitare basato sull'ellissoide WGS84. Queste tecniche, cioè, affinano la precisione delle baseline dX - dY - dZ , ma sempre rispetto a quel sistema cartesiano con origine nel centro di massa della terra. Dobbiamo infatti pensare che chi ha congegnato il GNSS non aveva certo tra i suoi obiettivi che le rilevazioni satellitari dovessero poi servire ad un geometra italiano che lavora su un piano topografico per produrre rilievi da presentare in Catasto. I problemi che ho cercato di mettere in evidenza in questo paragrafo si manifestano "a valle" del rilievo satellitare ed esistono comunque, indipendentemente dalla precisione ottenuta da tale rilievo, proprio perché nascono dalla trasformazione dei dati dal sistema geocentrico al piano topografico.

Dopo tutta questa disamina sui rischi di un utilizzo non appropriato delle reti di stazioni permanenti, la domanda diventa:

Vale la pena di correre i rischi sopra evidenziati solo per poter sfruttare qualche rilevazione dei lavori precedenti?

La mia risposta è: assolutamente no! Anche perché, come ho già accennato, l'esigenza di cui sopra si può benissimo soddisfare rimanendo nel familiare ambito topografico, senza dover scomodare la geodesia.

Come si fa?

Concettualmente credo sia abbastanza facile da capire.

Se ci serve, ad esempio, la rilevazione a un PF di un rilievo precedente, è evidente che quel rilievo si trova nella stessa zona ristretta di quello che stiamo per svolgere. In questo caso, se ci si è portati in locale la base GPS per entrambi i rilievi (con la VRS), le due basi sono vicine tra loro e tali quindi da scongiurare il problema dei piani sghembi di Figura 277 a pag. 400. Infatti, i due meridiani e le due normali ellissoidiche sono pressoché coincidenti, e questo riduce a valori irrilevanti gli errori commessi nel mettere in relazione tra loro i due rilievi. Questa è quindi la soluzione adottata in Geocat, la vedremo in dettaglio al successivo paragrafo *Unione di due rilievi GPS* a pag. 413.

Bene, fin qui spero di aver illustrato con sufficiente chiarezza i concetti teorici dei due principali rischi di errore che si corrono nei rilievi GPS in modalità NRTK appoggiati alle reti di stazioni permanenti. Ma questa è una guida operativa, e come tale non posso esimermi dal dimostrare il tutto anche a livello pratico. Lo farò nei due paragrafi che seguono mediante altrettanti esempi.

L'errore della base distante

La Figura 278 mostra il rilievo di due PF, *PF01* e *PF02*, estratto da due distinti rilievi (effettivamente eseguiti) appoggiati alla stessa base GPS, *1000*. Come si può notare, la base dista dai due punti rispettivamente 25 e 28 km, mentre i due punti tra loro sono distanti 11 km. La tabella delle coordinate riportata in basso di Figura 278 mostra i risultati del calcolo svolto da Geocat in applicazione della trasformazione euleriana descritta al paragrafo 5.6.1 *Concetti base sul sistema WGS84 del GPS*, Figura 266 a pag. 379 e seguenti. Come spiegato in quel paragrafo, questa trasformazione riporta su un piano tangente all'ellissoide (proprio nella base *1000*) i due punti rilevati. Pertanto, le due distanze, *1000-PF01* e *1000-PF02*, date da queste coordinate sono quelle sul piano tangente, indicate con la lettera **D** (maiuscola) nelle formule di Figura 275 a pag. 397. Con riferimento a queste formule, tale distanza piana, in funzione del raggio medio terrestre (considerato convenzionalmente pari a 6377 km) e dell'angolo al centro ω è:

$$D = R \tan \omega$$

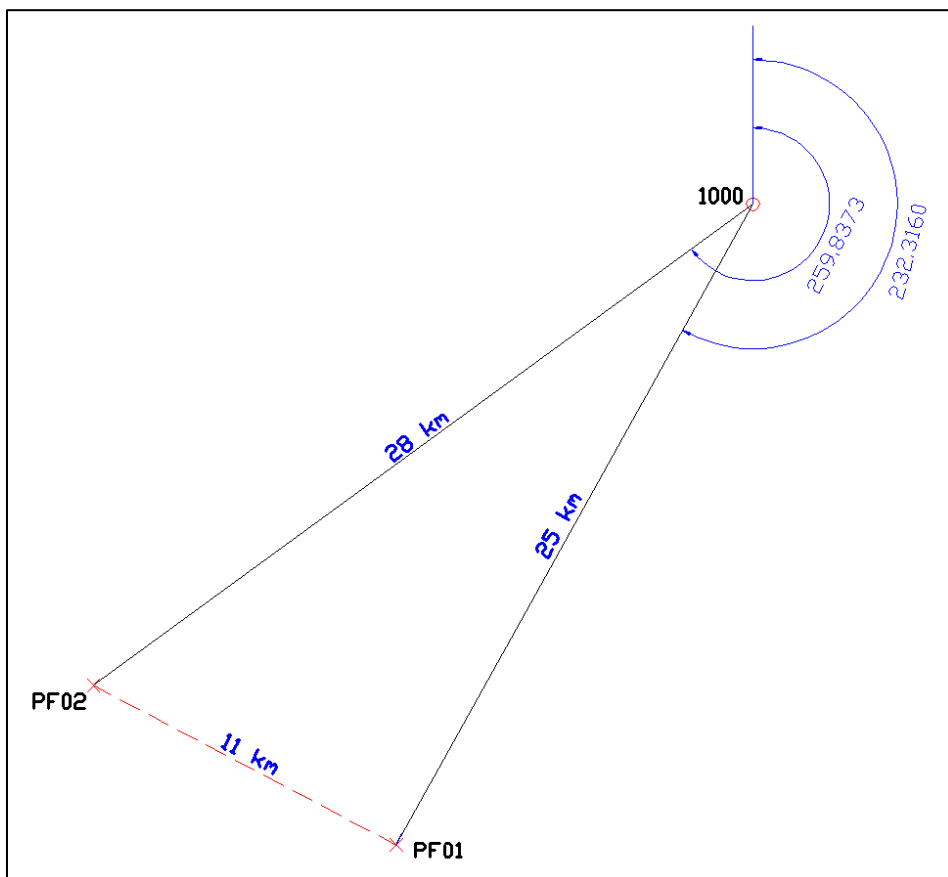
Quindi per calcolare l'angolo ω , si fa:

$$\omega = \arctan \frac{D}{R}$$

Mentre la distanza sferica **d** è data da:

$$d = R \omega$$

	Staz.	Punto	C.p.	H	Dx	Dy	Dz	Nota	Dop	C.
1	1000	PF01		0.000	17225.578	-8090.195	-16817.091		2	
2		PF02		0.000	16255.375	-19214.249	-12859.655		2	
3										



	Punto	C.p.	Est	Sqm E	Nord	Sqm N	Quota Z	Sqm Z	Longit.	Latitud.
1	1000		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	15.284131	41.123531
2	PF01		-12344.812	0.000	-22193.907	0.000	-99.303	0.000	15.137575	40.923591
3	PF02		-22819.663	0.000	-16668.705	0.000	-398.443	0.000	15.013016	40.973118
4										

Figura 278 - Esempio di due PF appartenenti a due distinti rilievi GPS appoggiati alla stessa base distante.

In Tabella 10 le formule appena viste sono state applicate per il calcolo delle distanze base-punti sulla sfera locale a partire dalla distanza piana.

Tabella 10 - *Calcolo della distanza sulla sfera locale a partire dalla distanza piana.*

Legenda: Est/Nord eul. = coordinate topografiche piane da trasformazione euleriana;

D = distanza nel piano topografico tangente in 1000;

ω = angolo al centro (rad.);

d = distanza sferica;

Calcoli svolti assumendo il raggio medio terrestre R pari a 6377 km.

	Est eul.	Nord eul.	D	ω (rad)	d	D - d
PF01	-12 344.812	-22 193.907	25 396.139	0.003982438	25 396.005	0.134
PF02	-22 819.663	-16 668.705	28 259.206	0.004431397	28 259.021	0.185

Come possiamo notare, l'errore $D - d$, nei due PF è rispettivamente di 13 e 18 cm, cioè di entità non del tutto trascurabile. Mi preme precisare, al riguardo, che nei rilievi originari questi due punti erano effettivamente dei fiduciali e infatti li ho voluti utilizzare in questo esempio proprio perché, come già detto, i tecnici che tendono ad appoggiare i rilievi alla stessa base lo fanno per poter trasferire le rilevazioni ai PF da un rilievo all'altro.

L'errore della doppia base

Come ho già accennato, l'errore provocato dalle basi multiple è ancora più temibile di quello visto al paragrafo precedente dovuto all'unica base posta ad una distanza che esce dal campo topografico. Infatti, oltre all'errore causato dai due piani topografici sghembi di Figura 277 a pag. 400, i tecnici che lasciano le basi nella loro posizione originaria (anziché portarle il locale con le tecniche VRS) in genere commettono comunque anche l'errore della base troppo distante. Si trovano cioè ad elaborare punti agganciati a due (o più) basi tutte ubicate al di fuori del campo topografico rispetto dall'oggetto del rilievo. L'esempio che vedremo in questo paragrafo riproduce esattamente questa situazione.

Il rilievo riprodotto nel disegno in alto di Figura 279 è tratto da un unico mega-rilievo a più basi realizzato (mettendo assieme più rilievi) dal tecnico che lo ha prodotto allo scopo di ottenere una propria "cartografia" del territorio di sua competenza per trarne i già citati vantaggi di interscambio delle rilevazioni da un lavoro all'altro.

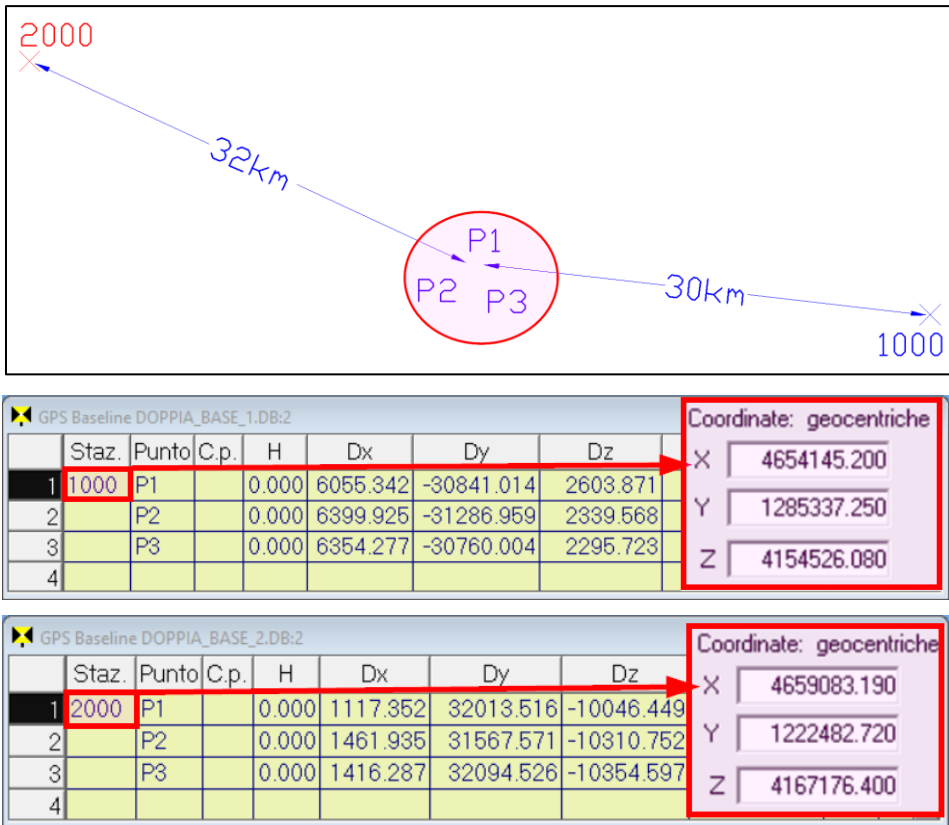


Figura 279 - Nel disegno in alto il rilievo originario dei punti P1, P2, P3 agganciati alle due basi 1000 e 2000. Sotto, i due rilievi agli stessi punti separati per ciascuna base allo scopo di sovrapporli per quantificare gli errori.

Da questo mega-rilievo ho isolato le due basi permanenti, 1000 e 2000, distanti rispettivamente 30 e 32 km da tre punti agganciati alle stesse, P1, P2, P3. Inoltre, per poter calcolare gli errori, ho suddiviso le due basi in altrettanti rilievi separati in modo da poter poi sfruttare la funzione di Geocat per sovrapporli mediante rototraslazione ai minimi quadrati. In realtà, come si può notare, i punti P1, P2 e P3 rilevati dalle due basi, 1000 e 2000, sono gli stessi. A riprova dell'unicità dei punti, in Figura 279 sono mostrati sia i delta dei punti, sia le coordinate geocentriche delle due basi. La Tabella 11 mostra che, sommando alle coordinate geocentriche delle due basi i delta ai punti, si ottengono per questi ultimi esattamente gli stessi valori di coordinate geocentriche. Infatti, come abbiamo visto al paragrafo 5.6.1 *Concetti base sul sistema WGS84 del GPS* a pag. 375, nel sistema globale WGS84 le coordinate sono direttamente sommabili.

Tabella 11 - Sommando i delta X-Y-Z dei punti P1, P2 e P3 alle coordinate geocentriche delle due basi 1000 e 2000, si ottengono le stesse identiche coordinate geocentriche dei tre punti, a riprova che sono esattamente gli stessi.

XYZ 1000	delta P1	XYZ P1	delta P2	XYZ P2	delta P3	XYZ P3
4654145.200	6055.342	4660200.542	6399.925	4660545.125	6354.277	4660499.477
1285337.250	-30841.014	1254496.236	-31286.959	1254050.291	-30760.004	1254577.246
4154526.080	-30841.014	4123685.066	2339.568	4156865.648	2295.723	4156821.803

XYZ 2000	delta P1	XYZ P1	delta P2	XYZ P2	delta P3	XYZ P3
4659083.190	1117.352	4660200.542	1461.935	4660545.125	1416.287	4660499.477
1222482.720	32013.516	1254496.236	31567.571	1254050.291	32094.526	1254577.246
4167176.400	-10046.449	4123685.066	-10310.752	4156865.648	-10354.597	4156821.803

Procediamo quindi con la nostra analisi lanciando il calcolo dei due rilievi di Figura 279, attivando l'opzione *Calcolo locale* del menù contestuale di Geocat (clic destro). I risultati sono riprodotti dalle due tabelle di coordinate di Figura 280.

	Punto	C.p.	Est	Sqm E	Nord	Sqm N	Quota Z	Sqm Z	Longit.	Latitud.
1	1000		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	15.438578	40.900386
2	P1		-31340.122	0.000	3521.973	0.000	-10.919	0.000	15.066468	40.931500
3	P2		-31861.706	0.000	3182.453	0.000	-20.239	0.000	15.060292	40.928422
4	P3		-31341.613	0.000	3086.276	0.000	21.200	0.000	15.066472	40.927576

	Punto	C.p.	Est	Sqm E	Nord	Sqm N	Quota Z	Sqm Z	Longit.	Latitud.
1	2000		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	14.702245	41.054721
2	P1		30681.744	0.000	-13621.945	0.000	431.889	0.000	15.066537	40.931485
3	P2		30162.947	0.000	-13965.823	0.000	422.559	0.000	15.060361	40.928408
4	P3		30684.233	0.000	-14057.724	0.000	464.006	0.000	15.066545	40.927561

Figura 280 - Le coordinate topografiche piane dei due rilievi ottenute per trasformazione euleriana. Le quote sono abnormemente diverse, ma non a causa dell'errore di sfericità terrestre, come si potrebbe pensare. Quest'ultimo errore affligge invece le coordinate Est e Nord in misura non trascurabile.

Naturalmente, considerata la distanza delle basi, le coordinate Est e Nord sono affette dall'errore di sfericità terrestre, come vedremo a breve.

Prima però è interessante vedere l'abnorme differenza sulle quote altimetriche evidenziate in Figura 280. Come si può vedere, mentre le due basi sono state considerate entrambe a quota 0.000, i punti agganciati alle stesse presentano una quota altimetrica con una differenza di oltre 400 metri tra una base e l'altra. Da una valutazione sommaria si potrebbe pensare che tale abnorme divario sia anch'esso dovuto all'errore di sfericità terrestre, considerato che sulle quote questo ha un'incidenza enormemente più elevata rispetto a quello planimetrico, come visto in Tabella 9 a pag. 397. Ma non è così, l'errore di sfericità viene corretto dal calcolo di Geocat applicando proprio la formula della x vista in quel paragrafo. La causa degli oltre 400 metri di differenza di quota è quella detta al punto 3 della spiegazione dei piani sghembi a pag. 401 (Figura 277 a pag. 400), vale a dire che la curvatura variabile dei meridiani (ellissoide), fa sì che il piano tangente alla base 1000 non passa alla stessa altezza sui punti P1, P2 e P3 di quanto non vi passi il piano tangente su 2000.

Tuttavia, i tecnici che lasciano le basi permanenti distanti non sono in genere sensibili a questo problema perché l'altimetria non è normalmente un requisito richiesto dall'incarico che hanno ricevuto.

Torniamo quindi all'errore planimetrico. Utilizzando le formule già viste, la Tabella 12 calcola la distanza sferica a partire da quella piana derivante dalle coordinate euleriane di Figura 280. Come avevamo già visto nella succitata Tabella 9, la differenza tra le due distanze non è trascurabile: circa 25 cm per la base 1000 e di 31 cm per la base 2000.

Tabella 12 - *Il calcolo della distanza sulla sfera locale a partire dalla distanza topografica piana (per la legenda dei simboli si veda la Tabella 10 a pag. 405). La differenza tra distanza piana e distanza sferica non è trascurabile.*

1000	Est eul.	Nord eul.	D	ω (rad)	d	D - d
P1	-31 340.122	3 521.973	31 537.399	0.004945451	31 537.142	0.257
P2	-31 861.706	3 182.453	32 020.249	0.005021167	32 019.979	0.269
P3	-31 341.613	3 086.276	31 493.203	0.004938521	31 492.946	0.256

2000	Est eul.	Nord eul.	D	ω (rad)	d	D - d
P1	30 681.744	-13 621.945	33 569.730	0.005264140	33 569.420	0.310
P2	30 162.947	-13 965.823	33 239.248	0.005212317	33 238.947	0.301
P3	30 684.233	-14 057.724	33 751.174	0.005292592	33 750.859	0.315

Con la distanza così corretta dall'errore di sfericità, correggiamo ora anche le coordinate dei punti. Lo facciamo nei due prospetti in alto di Tabella 13 applicando a tale distanza l'azimut da ciascuna base ai rispettivi punti. Quest'ultimo è stato calcolato sulle coordinate euleriane, e questo non sarebbe perfettamente corretto perché dovrebbe invece essere calcolato sulla sfera. Tuttavia, l'enorme distanza delle due basi (oltre 30 km) rispetto alla differenza di posizione, sul piano e sulla sfera, dei punti (20-30 cm) non introduce errori nel calcolo dell'angolo. I due prospetti in basso di Tabella 13 evidenziano le differenze tra le coordinate euleriane e quelle che risultano dalla correzione dell'errore di sfericità.

Tabella 13 - *Sopra, le coordinate reali dei punti corrette dall'errore di sfericità. Sotto, la differenza tra le coordinate reali e quelle topografiche piane.*

1000	d	ϑ (g)	Est reale	Nord reale
P1	31 537.142	307.1244	-31 339.866	3 521.944
P2	32 019.979	306.3377	-31 861.438	3 182.426
P3	31 492.946	306.2488	-31 341.358	3 086.251

2000	d	ϑ (g)	Est reale	Nord reale
P1	33 569.730	126.6001	30 681.461	-13 621.819
P2	33 239.248	127.6053	30 162.674	-13 965.697
P3	33 751.174	127.3494	30 683.946	-14 057.593

1000	Est eul.	Est reale	Delta Est	Nord eul.	Nord reale	Delta Nord
P1	-31 340.122	-31 339.866	-0.256	3 521.973	3 521.944	0.029
P2	-31 861.706	-31 861.438	-0.268	3 182.453	3 182.426	0.027
P3	-31 341.613	-31 341.358	-0.255	3 086.276	3 086.251	0.025

2000	Est eul.	Est reale	Delta Est	Nord eul.	Nord reale	Delta Nord
P1	30 681.744	30 681.461	0.283	-13 621.945	-13 621.819	-0.126
P2	30 162.947	30 162.674	0.273	-13 965.823	-13 965.697	-0.126
P3	30 684.233	30 683.946	0.287	-14 057.724	-14 057.593	-0.131

Con le coordinate dei punti così corrette per ciascuna base, vediamo ora l'errore planimetrico che si scarica sui punti stessi per effetto della doppia base. Per farlo sfruttiamo la tabella di calcolo della rototraslazione ai minimi quadrati di Geocat. Dalla schermata principale del programma, senza aver aperto nessun rilievo, clicchiamo sull'icona *Rototraslazione* della barra degli strumenti (la seconda da sinistra). Ci viene chiesto di dare un nome al file della rototraslazione che andremo a calcolare, nel nostro esempio inseriamo *DOPPIA_BASE.DB*. Si apre così la tabella della rototraslazione di Figura 281.

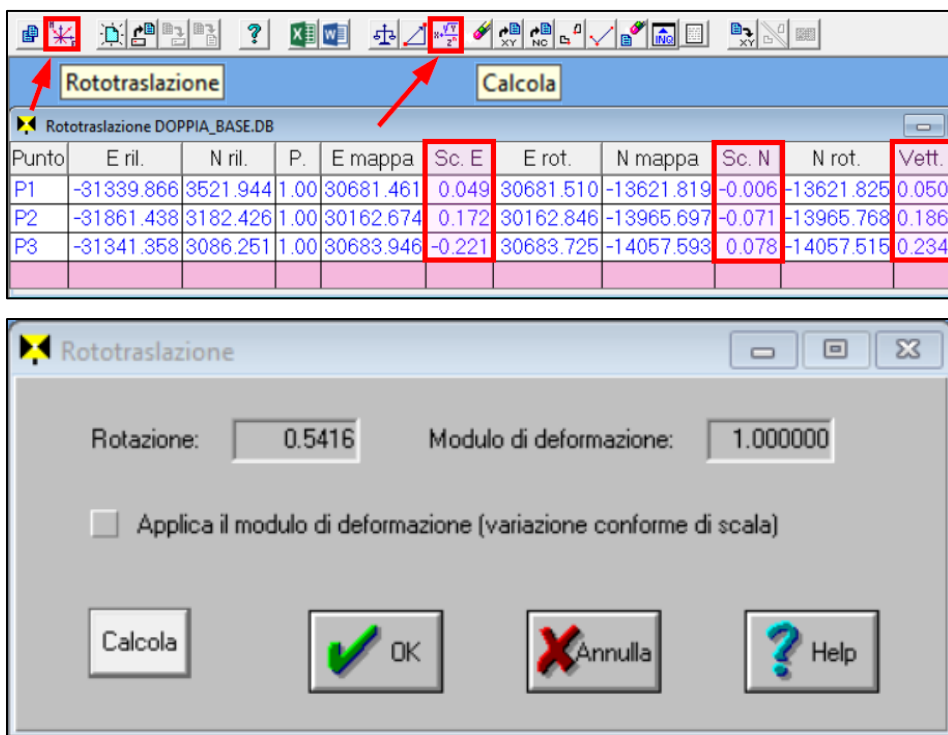


Figura 281 - Il calcolo della rototraslazione ai minimi quadrati tra le coordinate (corrette dell'errore di sfericità) dei punti agganciati alle due basi.

Come possiamo notare dai titoli delle colonne, questa tabella è pensata per rototraslare i rilievi sulla mappa. Le prime due colonne sono infatti *E ril.* e *N ril.*, mentre più a destra si trovano le colonne *E mappa* e *N mappa*. Ma queste diciture hanno soltanto un significato formale, dovuto al fatto che l'esigenza usuale di un utente Geocat è appunto la rototraslazione mappa-rilievo.

Nel nostro caso procediamo ad inserire nelle colonne *E ril.* e *N ril.* le coordinate reali della base 1000, e nelle colonne *E mappa* e *N mappa* le coordinate, sempre reali, della base 2000. Fatto ciò, sempre dalla tabella della rototraslazione, clicchiamo l'icona *Calcola* in alto, aprendo la finestra del calcolo di Figura 281 (in basso) che ci chiede se applicare o meno la variazione di scala. Per la spiegazione sulla rototraslazione ai minimi quadrati e la variazione di scala si consulti la sezione 5.15 *Riconfinazioni* al paragrafo 5.15.4 *Rototraslazione ai minimi quadrati* a pag. 893. In questo esempio mi limito a dire che, in generale, la variazione di scala si applica soltanto quando i due sistemi di riferimento hanno un grado di precisione diversa (come nella sovrapposizione mappa-rilievo) applicandola al sistema meno preciso (la mappa) per adattarlo a quello più preciso (il rilievo). Pertanto, in termini generali, non va mai applicata quando si sovrappongono due rilievi (che hanno lo stesso grado di precisione). In questo caso, quindi, non applichiamo la variazione di scala e deseleggiamo l'opzione *Applica il modulo di deformazione (variazione conforme di scala)*. Poi clicchiamo il bottone *Calcola* pervenendo ai risultati evidenziati in Figura 281.

Prima ancora di valutare gli scarti sui punti, è interessante notare il valore dell'angolo di rotazione calcolato dalla rototraslazione ai minimi quadrati e riportato nella mascherina di calcolo:

$$0.5416^g$$

Cos'è questo angolo?

È l'angolo che intercorre tra l'asse delle ordinate (nel nostro caso il Nord) dei due sistemi di riferimento sottoposti al calcolo della rototraslazione. A questo punto potrebbe essere lecito domandarsi:

Ma se sono due rilievi GPS, non dovrebbero essere entrambi orientati sul Nord WGS84? Come mai emerge questa divaricazione?

Beh, credo che quelli di voi che hanno letto con attenzione la spiegazione dei piani sghembi a pag. 400 siano in grado di risponderci da soli. Se così non fosse, il motivo è che i due rilievi GPS sono stati trasformati nei due sistemi topografici (euleriani) di Figura 277, ciascuno con l'asse Nord orientato sul meridiano della propria base distintamente, e i meridiani convergono ai poli terrestri. Quell'angolo è quindi la convergenza dei due meridiani delle basi 1000 e 2000 (distanti tra loro circa 60 km) ed è, come detto, una delle ragioni per le quali due basi GPS distanti danno luogo ad altrettanti piani topografici non relazionabili tra loro. Mi auguro quindi che questa risultanza possa aver contribuito a chiarire il concetto.

Passiamo ora ad analizzare gli scarti sui tre punti $P1$, $P2$, $P3$ comuni ai due rilievi, vale a dire la differenza di posizione dei punti stessi tra un rilievo e l'altro. Come possiamo notare dalla tabella di Figura 281, per il punto $P3$ emerge un vettore di scarto (colonna *Vett.*)⁴⁵ di 23 cm, il che significa che quel punto, che in realtà è lo stesso, risulta invece a 23 cm di distanza se agganciato alle due basi. Il tutto considerando che nella rototraslazione abbiamo utilizzato le coordinate corrette dall'errore di sfericità; altrimenti, usando quelle piane, sarebbe stato ancora maggiore.

45 Il vettore di scarto è l'ipotenusa del triangolo rettangolo formato dagli scarti Est e Nord, in pratica è la distanza effettiva tra la duplice posizione del punto.