Collegio dei Geometri e Geometri Laureati di Padova

Corso online

Complementi di Geodesia e Cartografia per Geometri

Modulo 3
Posizionamento e Cartografia

Lezione 8 – Mercoledì, 17 luglio 2019, ore 16:00

Posizionamento misto:
Compensazione e errori

Compensazione planimetrica di una rete topografica con misure TS, “dirette” e GNSS

In quale sistema?

sistema euleriano locale

$$x = s\cos\alpha\left(1-\frac{s^2}{6\rho N}+\ldots\right)$$
$$y = s\sin\alpha\left(1-\frac{s^2}{6\rho N}+\ldots\right)$$

Sviluppi di Puiseaux-Weingarten

$$x = s\cos\alpha\left(1-\frac{s^2}{6R^2}\right)$$
$$y = s\sin\alpha\left(1-\frac{s^2}{6R^2}\right)$$

Campo di validità = campo geodetico
≈ 100 km (ε <10^{-6}S)

Per s < ≈ 100 km
s = s'
A = α

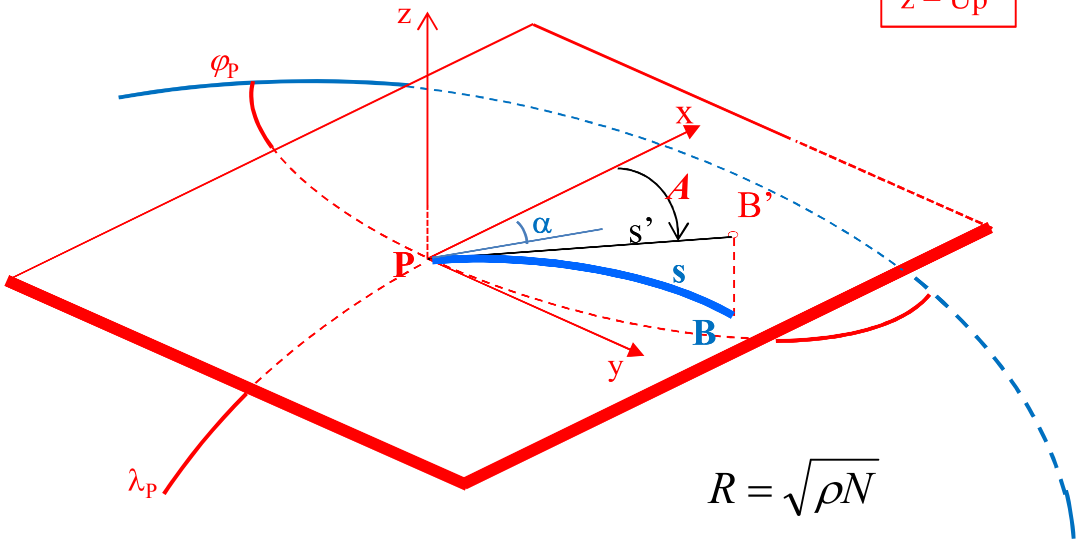
$$x = s\cos\alpha$$
$$y = s\sin\alpha$$

Campo di validità = campo topografico
≈ 15 km (ε <10^{-6}S)

Sistema euleriano per P

s = geodetica PB
α = azimut della geodetica
A = azimut della sezione normale sul piano xy
PB' = s' = lunghezza della sezione normale su xy

x = N
y = E
z = Up



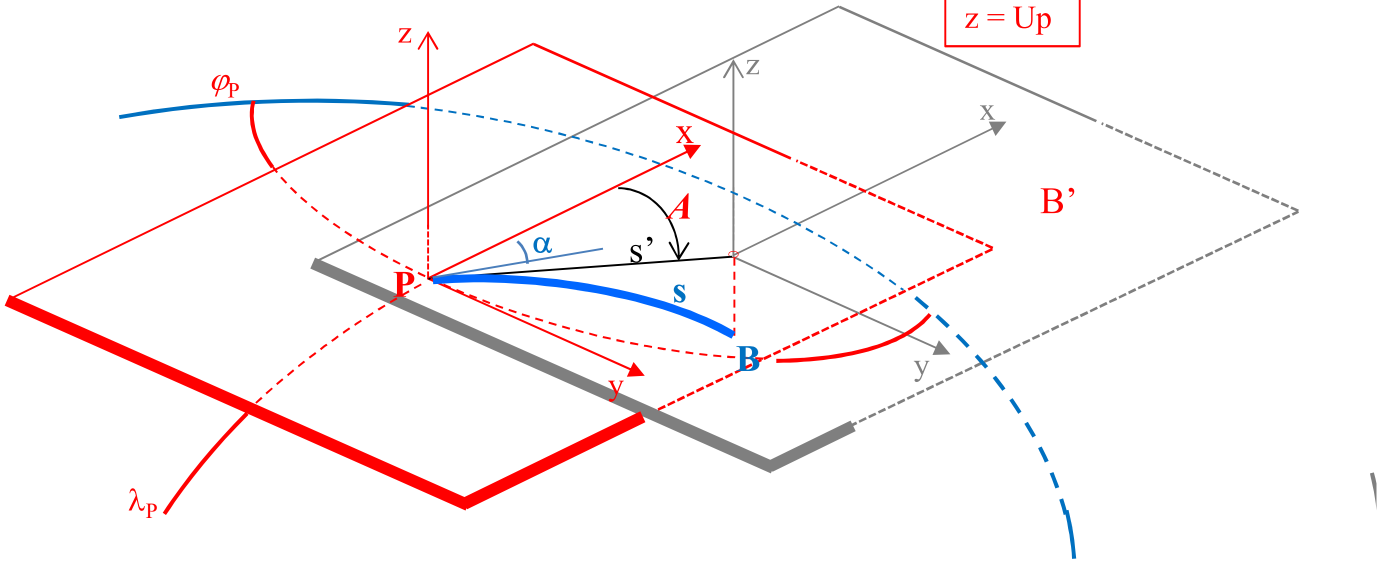
$$R = \sqrt{\rho N}$$
$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{W^3}$$
$$N = \frac{a}{W}$$
$$W = \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}$$

s = geodetica PB
α = azimut della geodetica
A = azimut della sezione normale sul piano xy
PB' = s' = lunghezza della sezione normale su xy

Sistemi euleriani per P e B

Nel campo topografico tutti i sistemi euleriani locali hanno gli assi Up (z) paralleli, ovvero il difetto di parallelismo non è significativo

x = N
y = E
z = Up



$$x = s\cos\alpha$$
$$y = s\sin\alpha$$

Campo di validità = campo topografico
≈ 15 km (ε <10^{-6}S)

Sistemi euleriani per P e B

s = geodetica PB
α = azimut della geodetica
A = azimut della sezione normale sul piano xy
PB' = s' = lunghezza della sezione normale su xy

Fuori dal campo topografico due sistemi euleriani locali hanno gli assi Up (z) non paralleli

x = N
y = E
z = Up

x' = N'
y' = E'
z' = Up'

$$x = s\cos\alpha\left(1-\frac{s^2}{6R^2}\right)$$

$$y = s\sin\alpha\left(1-\frac{s^2}{6R^2}\right)$$

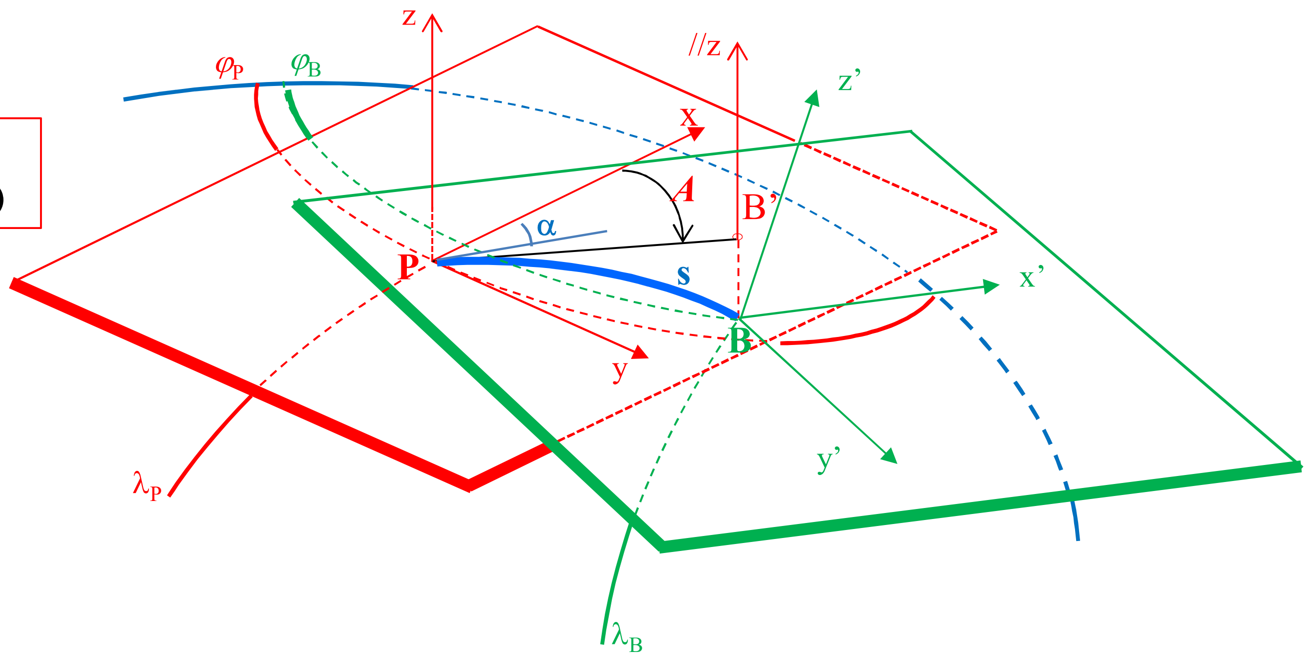
Campo di validità = campo geodetico ≈ 100 km (ε <10⁻⁶S)

$$R = \sqrt{\rho N}$$

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{W^3}$$

$$N = \frac{a}{W}$$

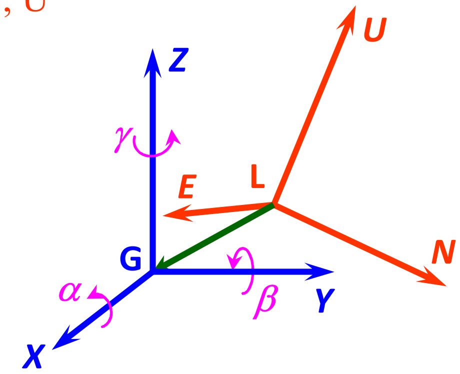
$$W = \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}$$



Compensazione planimetrica di una rete topografica con misure TS, "dirette" e GNSS

Passaggio dal sistema geocentrico φ, λ, h (o X, Y, Z) al sistema Euleriano locale N, E, Up
6 parametri – Lezione B6

Sistema di partenza: X, Y, Z   Sistema di arrivo: E, N, U



Un vettore nel sistema blu ha differenti componenti nel sistema rosso, calcolabili attraverso 3 traslazioni e 3 rotazioni (rispettivamente intorno agli assi X, Y, Z)

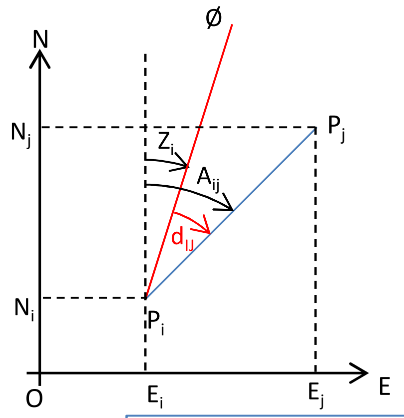
$$J_X = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \qquad J_Y = \begin{vmatrix} \cos\beta & 0 & -\operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{vmatrix} \qquad J_Z = \begin{vmatrix} \cos\gamma & \operatorname{sen}\gamma & 0 \\ -\operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Essendo α, β e γ angoli di rotazione positivi in senso antiorario se visti dal verso positivo dell'asse che deve ruotare

Moltiplicando le 3 matrici ed introducendo le traslazioni

$$\begin{vmatrix} E \\ N \\ U \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_G \\ N_G \\ U_G \end{vmatrix} + \mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} \qquad R = J_X \cdot J_Y \cdot J_Z$$

Compensazione planimetrica di una rete topografica con misure TS, "dirette" e GNSS



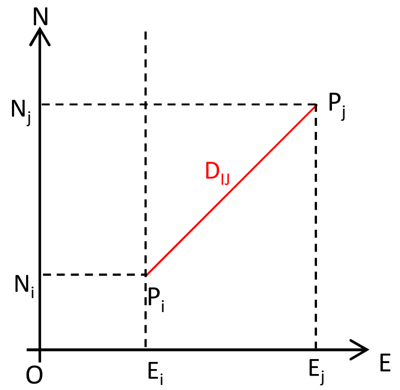
osservazioni angolari e di distanza
Lezione C1

$$arctg\frac{E_j - E_i}{N_j - N_i} - Z_i - d_{ij} = 0$$

Equazione generatrice non lineare

$$a_{ij}\Delta N_i + b_{ij}\Delta E_i + a_{ji}\Delta N_j + b_{ji}\Delta E_j - \Delta Z_i + l_{ij} = 0$$

equazione di osservazione tipo – **lineare -** delle osservazioni angolari nelle incognite ΔN_i, ΔE_i, ΔN_j, ΔE_j, ΔZ_i



$$\sqrt{(N_j - N_i)^2 + (E_j - E_i)^2} - D_{ij} = 0$$

Equazione generatrice non lineare

$$a_{ij}\Delta N_j + b_{ij}\Delta E_j + a_{ji}\Delta N_i + b_{ji}\Delta E_i + l_{ij} = 0$$

equazione di osservazione tipo - **lineare e adimensionale** - delle distanze nelle incognite ΔN_i e ΔE_i, ΔN_j ΔE_j

Compensazione planimetrica di una rete topografica con misure TS, “dirette” e GNSS

osservazioni angolari e di distanza
Lezione C1

equazioni generatrici lineari

$$a_{ij}\Delta N_i + b_{ij}\Delta E_i + a_{ji}\Delta N_j + b_{ji}\Delta E_j - \Delta Z_i + l_{ij} = 0$$

$$a_{ij}\Delta N_j + b_{ij}\Delta E_j + a_{ji}\Delta N_i + b_{ji}\Delta E_i + l_{ij} = 0$$

osservazioni angolari

$$a_{ij}\Delta N_i + b_{ij}\Delta E_i + a_{ji}\Delta N_j + b_{ji}\Delta E_j + c_{ij}\Delta Z_i + l_{ij} = 0$$

$$a_{ij} = \frac{E_j^0 - E_i^0}{(D_{ij}^0)^2} \qquad a_{ji} = -a_{ij}$$

$$c_{ji} = -1$$

$$b_{ij} = \frac{N_i^0 - N_j^0}{(D_{ij}^0)^2} \qquad b_{ji} = -b_{ij}$$

$$l_{ij} = arctg\frac{E_j^0 - E_i^0}{N_j^0 - N_i^0} - Z_i^0 - d_{ij}$$

distanze

$$a_{ij}\Delta N_j + b_{ij}\Delta E_j + a_{ji}\Delta N_i + b_{ji}\Delta E_i + l_{ij} = 0$$

$$a_{ij} = \frac{N_j^0 - N_i^0}{(D_{ij}^0)^2} \qquad a_{ji} = -a_{ij}$$

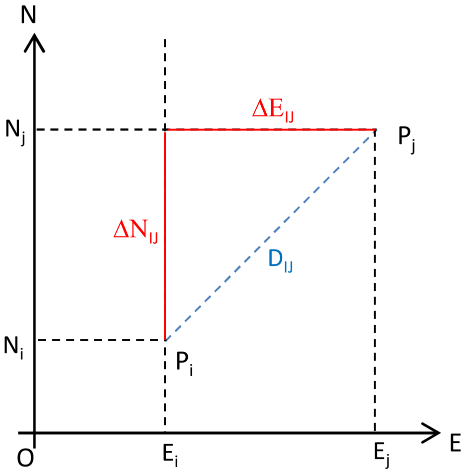
$$b_{ij} = \frac{E_j^0 - E_i^0}{(D_{ij}^0)^2} \qquad b_{ji} = -b_{ji}$$

$$l_{ij} = 1 - \frac{D_{ij}}{D_{ij}^0}$$

$$a_{ij}(ang) = b_{ij}(dist);\; b_{ij}(ang) = -a_{ij}(dist)$$

Esistono altri tipi di misure?

Sì, misure GNSS RTK



Misura indiretta delle componenti ΔN_{ij} e ΔE_{ij} nel sistema euleriano locale

informazione più ricca della misura diretta della distanza

Prima ricaduta: misura indiretta della distanza piana D_{ij}

$$D_{ij} = \sqrt{(\Delta N_{ij})^2 + (\Delta E_{ij})^2} = \sqrt{(N_j - N_i)^2 + (E_j - E_i)^2}$$

$$\sqrt{(N_j - N_i)^2 + (E_j - E_i)^2} - D_{ij} = 0$$

Equazione non lineare che lega le componenti misurate alle coordinate di P_i e P_j

equazione tipo – non lineare - per le distanze piane da GNSS **formalmente identica** all'equazione tipo per le distanze TS

Già trattata e linearizzata! L C1

$$a_{ij} \Delta N_j + b_{ij} \Delta E_j + a_{ji} \Delta N_i + b_{ji} \Delta E_i + l_{ij} = 0$$

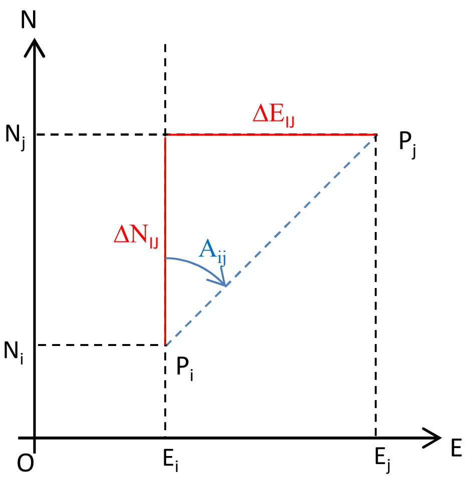
$$a_{ij} = \frac{N_j^0 - N_i^0}{(D_{ij}^0)^2} \quad b_{ij} = \frac{E_j^0 - E_i^0}{(D_{ij}^0)^2} \quad l_{ij} = 1 - \frac{D_{ij}}{D_{ij}^0}$$

$$a_{ji} = -a_{ij} \qquad b_{ji} = -b_{ji}$$

equazione tipo - **lineare e adimensionale** - delle distanze planimetriche da GNSS nelle incognite ΔN_i, ΔE_i, ΔN_j ΔE_j

Esistono altri tipi di misure?

Sì, misure GNSS RTK



Misura indiretta delle componenti ΔN_{ij} e ΔE_{ij} nel sistema euleriano locale

informazione più ricca della misura diretta della distanza

Seconda ricaduta: misura indiretta dell'azimut piano (A_{ij})

$$A_{ij} = arctg\frac{\Delta E_{ij}}{\Delta N_{ij}} = arctg\frac{E_j - E_i}{N_j - N_i}$$

$$arctg\frac{E_j - E_i}{N_j - N_i} - A_{ij} = 0$$

Equazione non lineare che lega le componenti misurate alle coordinate di P_i e P_j

equazione tipo – non lineare - per gli azimut piani da GNSS RTK

È necessario linearizzare la funzione arctg. Già fatto! L C1

$$arctg\frac{E_j - E_i}{N_j - N_i} = arctg\frac{E_j^0 - E_i^0}{N_j^0 - N_i^0} + \frac{E_j^0 - E_i^0}{(D_{ij}^0)^2}\Delta N_i + \frac{N_i^0 - N_j^0}{(D_{ij}^0)^2}\Delta E_i + \frac{E_i^0 - E_j^0}{(D_{ij}^0)^2}\Delta N_j + \frac{N_j^0 - N_i^0}{(D_{ij}^0)^2}\Delta E_j$$

$$\frac{E_j^0 - E_i^0}{(D_{ij}^0)^2}\Delta N_i + \frac{N_i^0 - N_j^0}{(D_{ij}^0)^2}\Delta E_i + \frac{E_i^0 - E_j^0}{(D_{ij}^0)^2}\Delta N_j + \frac{N_j^0 - N_i^0}{(D_{ij}^0)^2}\Delta E_j + arctg\frac{E_j^0 - E_i^0}{N_j^0 - N_i^0} - A_{ij} = 0$$

$$\boxed{a_{ij}\Delta N_i + b_{ij}\Delta E_i + a_{ji}\Delta N_j + b_{ji}\Delta E_j + l_{ij} = 0}$$

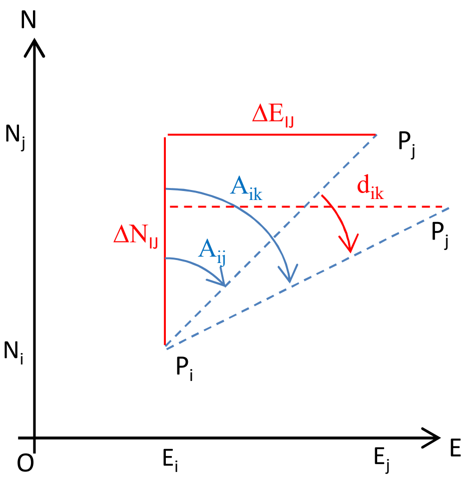
$$a_{ij} = \frac{E_j^0 - E_i^0}{(D_{ij}^0)^2} \qquad a_{ji} = -a_{ij}$$

$$b_{ij} = \frac{N_i^0 - N_j^0}{(D_{ij}^0)^2} \qquad b_{ji} = -b_{ij}$$

$$l_{ij} = arctg\frac{\Delta E_{ij}^0}{\Delta N_{ij}^0} - A_{ij}$$

equazione - **lineare** - degli azimut piani da GNSS RTK nelle incognite ΔN_i, ΔE_i, ΔN_j, ΔE_j

in alternativa …



Misura indiretta delle componenti ΔN_{ij} e ΔE_{ij} nel sistema euleriano locale

informazione più ricca della misura diretta della distanza

Seconda ricaduta: misura indiretta della direzione d_{ik} come differenza di azimut

$$d_{ik} = A_{ik} - A_{ij} = arctg\frac{\Delta E_{ik}}{\Delta N_{ik}} - arctg\frac{\Delta E_{ij}}{\Delta N_{ij}} = arctg\frac{E_k - E_i}{N_k - N_i} - arctg\frac{E_j - E_i}{N_j - N_i}$$

$$arctg\frac{E_k - E_i}{N_k - N_i} - arctg\frac{E_j - E_i}{N_j - N_i} - d_{ik} = 0$$

Z_i

Equazione non lineare che lega le componenti misurate alle coordinate di P_i e P_j

equazione di osservazione tipo – non lineare - per le direzioni da GNSS

È necessario linearizzare la funzione arctg.
Già fatto! L C1

etc. etc. …

Esistono altri tipi di misure?

Sì, misure GNSS RTK

"Misura" delle componenti ΔN_{ij} e ΔE_{ij} nel sistema euleriano locale

informazione più ricca della misura diretta della distanza

$$a_{ij}\Delta N_j + b_{ij}\Delta E_j + a_{ji}\Delta N_i + b_{ji}\Delta E_i + l_{ij} = 0$$

equazione tipo - **lineare e adimensionale** - delle distanze piane da GNSS nelle incognite ΔN_i, ΔE_i, ΔN_j ΔE_j

$$a_{ij}\Delta N_i + b_{ij}\Delta E_i + a_{ji}\Delta N_j + b_{ji}\Delta E_j + l_{ij} = 0$$

Equazione tipo - **lineare** - degli azimut piani da GNSS nelle incognite ΔN_i, ΔE_i, ΔN_j, ΔE_j

Dalle 2 componenti planimetriche stimate con GNSS nel sistema euleriano locale si ottengono 2 equazioni di osservazione lineari nelle coordinate incognite di P_i e P_j

2 misure → 2 equazioni di osservazione → 2 equazioni generatrici

Problematiche logistiche e operative dell'esempio da analizzare
(Geom. Gianni Rossi)

Compensazione planimetrica di una rete topografica con misure TS, “dirette” e GNSS-RTK

Problema:
Stimare la posizione di 19 punti: 100, 101, 102, 103, 200, 201, 300, 400, 500, 501, 502, 1007, 1008, 1010, 1041, 1042, 2001, 2002, 2004 (38 inc.)
nel sistema euleriano locale riferito al punto base (virtuale) 1000 con misure TS, “dirette” e GNSS-RTK

-1 punto fisso (1000) e 1 orientamento fisso (?) → minimi vincoli
- “*Misura*” GNSS-RTK delle componenti delle baseline dal *punto base* 1000 ai punti 100, 300, 400, 500, 1007, 1008, 1010, 1041, 1042 (18 eq.)
- Misure TS in 100 con osservazioni a 300, 400, 200, 101, 103, 102 (12 eq. / 1 inc. di orientamento)
- Misure TS in 200 con osservazioni a 201, 101, 100 (6 eq. / 1 inc. di orientamento)
- Misure TS in 500 con osservazioni a 502, 1010, 501 (6 eq. / 1 inc. di orientamento)
- Misure TS simulate in 2001 con osservazioni a 2004, 2002 (4 eq. / 1 inc. di orientamento)
- Misura diretta delle distanze 2004-1008, 2004-1007, 2001-1008 (3 eq.)

49 eq. in 42 inc.
38 inc. di posizione +4 inc. di orientamento
Ridondanza globale RG = 49-42 = 7

A

Ridondanza locale RL
100: 2+12+2-3=13
101: 2+2-2=2
200: 2+6-3=5
300: 2+2-2=2
400: 2+2-2=2
500: 2+6-3=5
1007: 2+1-2=1
1008: 2+2-2=2
1010: 2+2-2=2
2001: 4+1-3=2
2004: 2+2-2=2

Ridondanza locale RL
102: 2-2=0
103: 2-2=0
201: 2-2=0
501: 2-2=0
502: 2-2=0
1041: 2-2=0
1042: 2-2=0
2002: 2-2=0

PREGEO

Compensazione Planimetrica

Rilievo eseguito con n=7 osservazioni sovrabbondanti

s.q.m. dell'unita' di peso a priori	0.02209
s.q.m. dell'unita' di peso a posteriori	0.03520
s.q.m. dell'unita' di peso interna	0.02484
s.q.m. dell'unita' di peso esterna	1.41717

$$\boxed{\sigma_0 = \sqrt{\frac{[v_k^2]}{n-m}}}$$

rad/gon/m ??

n-m = rid. globale

Compensazione Planimetrica

Rilievo eseguito con n=7 osservazioni sovrabbondanti

RIDONDANZA GLOBALE = 7 (RG> 0 è condizione necessaria **ma non sufficiente** per la compensazione ai m.q.)

s.q.m. dell'unita' di peso

indice sintetico dell'affidabilità (reliability) del progetto e/o della soluzione

s.q.m. dell'unita' di peso a priori

indice sintetico atteso dell'affidabilità del progetto (dipende da strumenti, metodi e geometria)

s.q.m. dell'unita' di peso a posteriori

indice sintetico dell'affidabilità della soluzione (dopo misure e calcolo di compensazione ai m.q.)

s.q.m. dell'unita' di peso interna (a posteriori)

indice sintetico dell'affidabilità delle misure nella soluzione (dopo la compensazione ai minimi vincoli)

s.q.m. dell'unita' di peso esterna (a posteriori)

indice sintetico dell'affidabilità della soluzione dopo «trasformazione conforme (4 par.) ai m.q. su coordinate cartografiche»

Compensazione planimetrica di una rete topografica con misure TS, "dirette" e GNSS-RTK

Nuovo problema:
Stimare la posizione di 11 punti: 100, 101, 200, 300, 400, 500, 1007, 1008, 1010, 2001, 2004 (22 inc.)
nel sistema euleriano locale riferito al punto base (virtuale) 1000 con misure TS, «dirette» e GNSS-RTK

-1 punto fisso (1000) e 1 orientamento fisso (?) → minimi vincoli
- "*Misura*" GNSS-RTK delle componenti delle baseline dal *punto base*1000 ai punti 100, 300, 400, 500, 1007, 1008, 1010 (14 eq.)
- Misure TS in 100 con osservazioni a 300, 400, 200, 101 (8 eq. / 1 inc. di orientamento)
- Misure TS in 200 con osservazioni a 101, 100 (4 eq. / 1 inc. di orientamento)
-Misura diretta delle distanze 2004-1008, 2004-1007, 2001-1008, 2001- 2004, 500-1010* (5 eq.)

31 eq. in 24 inc.
22 inc. di posizione +2 inc. di orientamento
Ridondanza globale RG = 31-24 = 7

B

Ridondanza locale RL
100: 2+8+2-3=9
101: 2+2-2=2
200: 2+4-3=3
300: 2+2-2=2
400: 2+2-2=2
500: 2+1-2=1
1007: 2+1-2=1
1008: 2+2-2=2
1010: 2+1-2=1
2004: 3-2=1

Ridondanza locale RL
2001: 2-2=0

Compensazione planimetrica di una rete topografica con misure TS, “dirette” e GNSS-RTK

Nuovo problema:
Stimare la posizione di 10 punti 100, 101, 200, 300, 400, 500, 1007, 1008, 1010, 2004 (20 inc.)
nel sistema euleriano locale riferito al punto base (virtuale) 1000 con misure TS, “dirette” e GNSS-RTK

-1 punto fisso (1000) e 1 orientamento fisso (?) → minimi vincoli
- “*Misura*” GNSS-RTK delle componenti delle baseline dal *punto base*1000 ai punti 100, 300, 400, 500, 1007, 1008, 1010 (14 eq.)
- Misure TS in 100 con osservazioni a 300, 400, 200, 101 (8 eq. / 1 inc. di orientamento)
- Misure TS in 200 con osservazioni a 101, 100 (4 eq. / 1 inc. di orientamento)
-Misura diretta delle distanze 2004-1008, 2004-1007, 500-1010* (3 eq.)

Ridondanza locale RL
100: 2+8+2-3=9
101: 2+2-2=2
200: 2+4-3=3
300: 2+2-2=2
400: 2+2-2=2
500: 2+1-2=1
1007: 2+1-2=1
1008: 2+1-2=1
1010: 2+1-2=1

Ridondanza locale RL
2004: 2-2=0

29 eq. in 22 inc.
20 inc. di posizione +2 inc. di orientamento
Ridondanza globale RG = 29-22 = 7

C

Compensazione planimetrica di una rete topografica con misure TS, "dirette" e GNSS-RTK

Nuovo problema:
Stimare la posizione di 9 punti: 100, 101, 200, 300, 400, 500, 1007, 1008, 1010 (18 inc.)
nel sistema euleriano locale riferito al punto base (virtuale) 1000 con misure TS, "dirette" e GNSS-RTK

-1 punto fisso (1000) e 1 orientamento fisso (?) → minimi vincoli
- "*Misura*" GNSS-RTK delle componenti delle baseline dal *punto base*1000 ai punti 100, 300, 400, 500, 1007, 1008, 1010 (14 eq.)
- Misure TS in 100 con osservazioni a 300, 400, 200, 101 (8 eq. / 1 inc. di orientamento)
- Misure TS in 200 con osservazioni a 101, 100 (4 eq. / 1 inc. di orientamento)
-Misura diretta delle distanze 500-1010*(1 eq.)

27 eq. in 20 inc.
18 inc. di posizione +2 inc. di orientamento
Ridondanza globale RG = 27-20 = 7

D

Ridondanza locale RL
100: 2+8+2-3=9
101: 2+2-2=2
200: 2+4-3=3
300: 2+2-2=2
400: 2+2-2=2
500: 2+1-2=1
1010: 2+1-2=1

Ridondanza locale RL
1007: 2-2=0
1008: 2-2=0

Compensazione planimetrica di una rete topografica con misure TS, "dirette" e GNSS-RTK

Nuovo problema:
Stimare la posizione di 7 punti 100, 101, 200, 300, 400, 500, 1010 (14 inc.)
nel sistema euleriano locale riferito al punto base (virtuale) 1000 con misure TS, "dirette" e GNSS-RTK

-1 punto fisso (1000) e 1 orientamento fisso (?) → minimi vincoli
- "*Misura*" GNSS-RTK delle componenti delle baseline dal *punto base*1000 ai punti 100, 300, 400, 500, 1010 (10 eq.)
- Misure TS in 100 con osservazioni a 300, 400, 200, 101 (8 eq. / 1 inc. di orientamento)
- Misure TS in 200 con osservazioni a 101, 100 (4 eq. / 1 inc. di orientamento)
-Misura diretta delle distanze 500 - 1010 (1 eq.)

23 eq. in 16 inc.
14 inc. di posizione +2 inc. di orientamento
Ridondanza globale RG = 23-16 = 7

E

Ridondanza locale RL
100: 2+8+2-3=9
101: 2+2-2=2
200: 2+4-3=3
300: 2+2-2=2
400: 2+2-2=2
500: 2+1-2=1
1010: 2+1-2=1

Ridondanza locale RL > 0
OK!!!

Compensazione planimetrica di una rete topografica con misure TS, “dirette” e GNSS-RTK

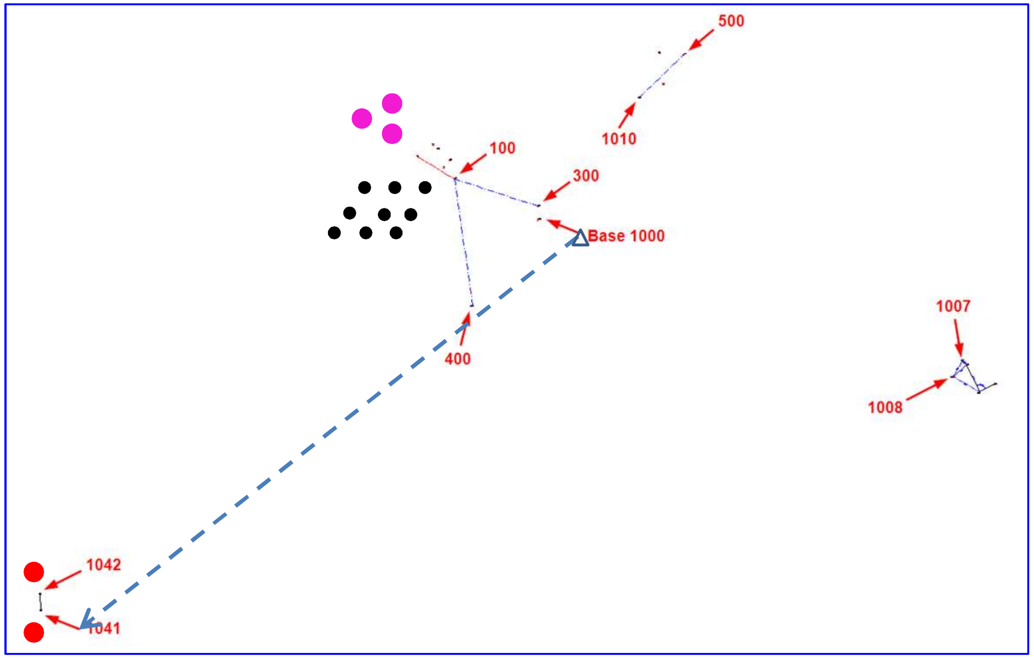
Compensazione ai minimi quadrati per “variazione di coordinate”

ipotesi:

- Osservazioni sovrabbondanti globalmente e localmente
- Disponibilità delle coordinate approssimate dei punti incogniti nel sistema locale

tesi:

- Definire il sistema di riferimento (unico) per i dati di ingresso e per i risultati
- Geometrizzare il problema e stimare le incognite
- Stimare gli errori



Calcolo di compensazione – la stima delle incognite

Il problema presenta

- 7 punti incogniti → 14 incognite "variazioni di coordinate" ΔN_i, ΔE_i, i=1,…,7
- 1 punto fisso ($\Delta N_{1000} = \Delta E_{1000} = 0$)
- 1 orientamento noto (?)

-1 punto fisso (1000) e 1 orientamento fisso (?) → minimi vincoli
- "*Misura*" GNSS-RTK delle componenti delle baseline dal *punto base* 1000 ai punti 100, 300, 400, 500, 1010 (10 eq.)
- Misure TS in 100 con osservazioni a 300, 400, 200, 101 (8 eq. / 1 inc. di orientamento)
- Misure TS in 200 con osservazioni a 101, 100 (4 eq. / 1 inc. di orientamento)
-Misura diretta delle distanze 500 - 1010 (1 eq.)

Le 2 stazioni angolari introducono **2 incognite** "variazioni di costanti di orientamento" ΔZ_{100}, ΔZ_{200}

Abbiamo dunque a disposizione un sistema di 23 equazioni lineari non omogenee per stimare 16 incognite.

Le quantità ΔN_i, ΔE_i (i=1, …, 7), ΔZ_{100}, ΔZ_{200}
costituiscono le correzioni **incognite** ai valori approssimati e si stimano con la compensazione ai m. q.

PREGEO - Compensazione Planimetrica

Punti della Rete

nome	nord	sqm	est	sqm	semiasseMax	semiasseMin	inclinazione
1000	-0.143	+/-0.015	0.160	+/-0.015	0.016	0.014	58.617
100	20.017	+/-0.011	-41.991	+/-0.020	0.020	0.011	194.108
300	6.673	+/-0.024	0.130	+/-0.018	0.025	0.017	120.843
400	-42.065	+/-0.013	-32.886	+/-0.033	0.033	0.013	199.533
500	80.822	+/-0.033	74.075	+/-0.031	0.038	0.026	144.551
1010	60.306	+/-0.032	52.191	+/-0.031	0.036	0.026	145.552
~~1007~~	~~-70.034~~	~~+/-0.040~~	~~214.627~~	~~+/-0.042~~	~~0.051~~	~~0.028~~	~~47.233~~
~~1008~~	~~-77.554~~	~~+/-0.046~~	~~210.163~~	~~+/-0.026~~	~~0.046~~	~~0.026~~	~~101.170~~
200	30.897	+/-0.019	-60.383	+/-0.025	0.027	0.016	31.043
101	25.694	+/-0.013	-47.581	+/-0.022	0.022	0.013	7.173
~~2004~~	~~-71.919~~	~~+/-0.028~~	~~216.804~~	~~+/-0.046~~	~~0.046~~	~~0.027~~	~~3.986~~
~~2001~~	~~-85.029~~	~~+/-0.072~~	~~223.432~~	~~+/-0.082~~	~~0.104~~	~~0.032~~	~~45.181~~

Punti di Dettaglio

~~1041~~	~~-190.646~~	~~+/-0.063~~	~~-251.677~~	~~+/-0.053~~	~~0.080~~	~~0.018~~	~~144.195~~
~~1042~~	~~-183.409~~	~~+/-0.063~~	~~-252.156~~	~~+/-0.052~~	~~0.079~~	~~0.018~~	~~143.416~~
~~102~~	~~29.249~~	~~+/-0.015~~	~~-44.294~~	~~+/-0.023~~	~~0.023~~	~~0.015~~	~~9.005~~
~~103~~	~~34.971~~	~~+/-0.016~~	~~-50.693~~	~~+/-0.026~~	~~0.027~~	~~0.015~~	~~21.164~~
~~201~~	~~36.782~~	~~+/-0.016~~	~~-52.526~~	~~+/-0.028~~	~~0.029~~	~~0.016~~	~~10.134~~
~~501~~	~~81.377~~	~~+/-0.027~~	~~61.989~~	~~+/-0.033~~	~~0.033~~	~~0.027~~	~~196.386~~
~~502~~	~~66.664~~	~~+/-0.028~~	~~63.827~~	~~+/-0.027~~	~~0.029~~	~~0.026~~	~~136.114~~
~~2002~~	~~-81.384~~	~~+/-0.134~~	~~230.643~~	~~+/-0.059~~	~~0.140~~	~~0.043~~	~~80.370~~

PREGEO - Compensazione Planimetrica

Correzioni d'orientamento e relativi sqm

nome stazione	N. ripetiz.	Correzione [GC]		sqm [CC]
1000 (?)	0	0.16102	+/-	122.58
100	0	6.04430	+/-	399.16
200	0	31.75906	+/-	400.41
~~500~~	~~0~~	~~11.98985~~	~~+/-~~	~~1071.82~~
~~1008~~	~~0~~	~~55.20900~~	~~+/-~~	~~4435.12~~
~~1007~~	~~0~~	~~145.43245~~	~~+/-~~	~~13665.87~~
~~1008~~	~~1~~	~~132.65943~~	~~+/-~~	~~5667.92~~
~~2004~~	~~0~~	~~170.20098~~	~~+/-~~	~~5693.99~~
~~2001~~	~~0~~	~~370.20098~~	~~+/~~	~~-5693.99~~

Calcolo di compensazione – equazioni generatrici

osservazioni angolari

$$a_{ij}\Delta N_i + b_{ij}\Delta E_i + a_{ji}\Delta N_j + b_{ji}\Delta E_j + c_{ij}\Delta Z_i + l_{ij} = 0$$

$$a_{ij} = \frac{E_j^0 - E_i^0}{(D_{ij}^0)^2} \qquad b_{ij} = \frac{N_i^0 - N_j^0}{(D_{ij}^0)^2} \qquad l_{ij} = arctg\frac{E_j^0 - E_i^0}{N_j^0 - N_i^0} - Z_i^0 - d_{ij}$$

$$a_{ji} = -a_{ij} \qquad b_{ji} = -b_{ij} \qquad c_{ji} = -1$$

Distanze piane (da TS, RTK ecc.)

$$a_{ij}\Delta N_j + b_{ij}\Delta E_j + a_{ji}\Delta N_i + b_{ji}\Delta E_i + l_{ij} = 0$$

$$a_{ij} = \frac{N_j^0 - N_i^0}{(D_{ij}^0)^2} \qquad b_{ij} = \frac{E_j^0 - E_i^0}{(D_{ij}^0)^2} \qquad l_{ij} = 1 - \frac{D_{ij}}{D_{ij}^0}$$

$$a_{ji} = -a_{ij} \qquad b_{ji} = -b_{ji}$$

Azimut piani (da RTK)

$$a_{ij}\Delta N_i + b_{ij}\Delta E_i + a_{ji}\Delta N_j + b_{ji}\Delta E_j + l_{ij} = 0$$

$$a_{ij} = \frac{E_j^0 - E_i^0}{(D_{ij}^0)^2} \qquad b_{ij} = \frac{N_i^0 - N_j^0}{(D_{ij}^0)^2} \qquad l_{ij} = arctg\frac{\Delta E_{ij}^0}{\Delta N_{ij}^0} - A_{ij}$$

$$a_{ji} = -a_{ij} \qquad b_{ji} = -b_{ij}$$

$$a_{ij}(ang) = b_{ij}(dist) = a_{ij}(Az)$$
$$b_{ij}(ang) = -a_{ij}(dist) = b_{ij}(Az)$$

a, b* = f(N⁰, E⁰) → *dipendono dalle coordinate di progetto!

Calcolo di compensazione – equazioni generatrici azimut

1 $$a_{100,1000}\Delta N_{100} + b_{100,1000}\Delta E_{100} + l_{1000,100} = 0$$

2 $$a_{300,1000}\Delta N_{300} + b_{300,1000}\Delta E_{300} + l_{1000,300} = 0$$

3 $$a_{400,1000}\Delta N_{400} + b_{400,1000}\Delta E_{400} + l_{1000,400} = 0$$

4 $$a_{500,1000}\Delta N_{500} + b_{500,1000}\Delta E_{500} + l_{1000,500} = 0$$

5 $$a_{1010,1000}\Delta N_{1010} + b_{1010,1000}\Delta E_{1010} + l_{1000,1010} = 0$$

Azimut piani (da RTK)

$$a_{ij}\Delta N_i + b_{ij}\Delta E_i + a_{ji}\Delta N_j + b_{ji}\Delta E_j + l_{ij} = 0$$

$$a_{ij} = \frac{E_j^0 - E_i^0}{(D_{ij}^0)^2} \quad b_{ij} = \frac{N_i^0 - N_j^0}{(D_{ij}^0)^2} \quad l_{ij} = arctg\frac{\Delta E_{ij}^0}{\Delta N_{ij}^0} - A_{ij}$$

$$a_{ji} = -a_{ij} \qquad b_{ji} = -b_{ij}$$

"*Misura*" GNSS-RTK delle componenti delle baseline dal *punto base* 1000 ai punti 100, 300, 400, 500, 1010 (5 q.)

Calcolo di compensazione – equazioni generatrici angolari

Stazione angolare in 100 → 4 eq.

6 $a_{100,300}\Delta N_{100} + b_{100,300}\Delta E_{100} + a_{300,100}\Delta N_{300} + b_{300,100}\Delta E_{300} - \Delta Z_{100} + l_{100,300} = 0$

7 $a_{100,400}\Delta N_{100} + b_{100,400}\Delta E_{100} + a_{400,100}\Delta N_{400} + b_{400,100}\Delta E_{400} - \Delta Z_{100} + l_{100,400} = 0$

8 $a_{100,200}\Delta N_{100} + b_{100,200}\Delta E_{100} + a_{200,100}\Delta N_{200} + b_{200,100}\Delta E_{200} - \Delta Z_{100} + l_{100,200} = 0$

9 $a_{100,101}\Delta N_{100} + b_{100,101}\Delta E_{100} + a_{101,100}\Delta N_{101} + b_{101,100}\Delta E_{101} - \Delta Z_{100} + l_{100,101} = 0$

Stazione angolare in 200 → 2 eq.

10 $a_{200,101}\Delta N_{200} + b_{200,101}\Delta E_{200} + a_{101,200}\Delta N_{101} + b_{101,200}\Delta E_{101} - \Delta Z_{200} + l_{200,101} = 0$

11 $a_{200,100}\Delta N_{200} + b_{200,100}\Delta E_{200} + a_{100,200}\Delta N_{100} + b_{100,200}\Delta E_{100} - \Delta Z_{200} + l_{200,100} = 0$

osservazioni angolari

$$a_{ij}\Delta N_i + b_{ij}\Delta E_i + a_{ji}\Delta N_j + b_{ji}\Delta E_j + c_{ij}\Delta Z_i + l_{ij} = 0$$

$$a_{ij} = \frac{E_j^0 - E_i^0}{(D_{ij}^0)^2} \qquad b_{ij} = \frac{N_i^0 - N_j^0}{(D_{ij}^0)^2} \qquad l_{ij} = arctg\frac{E_j^0 - E_i^0}{N_j^0 - N_i^0} - Z_i^0 - d_{ij}$$

$$a_{ji} = -a_{ij} \qquad b_{ji} = -b_{ij}$$

Calcolo di compensazione – equazioni generatrici distanze

TS - 7 equazioni

12 $$a_{100,300}\Delta N_{300} + b_{100,300}\Delta E_{300} + a_{300,100}\Delta N_{100} + b_{300,100}\Delta E_{100} + l_{100,300} = 0$$

13 $$a_{100,400}\Delta N_{400} + b_{100,400}\Delta E_{400} + a_{400,100}\Delta N_{100} + b_{400,100}\Delta E_{100} + l_{100,400} = 0$$

14 $$a_{100,200}\Delta N_{200} + b_{100,200}\Delta E_{200} + a_{200,100}\Delta N_{100} + b_{200,100}\Delta E_{100} + l_{100,200} = 0$$

15 $$a_{100,101}\Delta N_{101} + b_{100,101}\Delta E_{101} + a_{101,100}\Delta N_{100} + b_{101,100}\Delta E_{100} + l_{101,200} = 0$$

16 $$a_{200,101}\Delta N_{101} + b_{200,101}\Delta E_{101} + a_{101,200}\Delta N_{200} + b_{101,200}\Delta E_{200} + l_{200,101} = 0$$

17 $$a_{200,100}\Delta N_{100} + b_{200,100}\Delta E_{101} + a_{100,200}\Delta N_{200} + b_{100,200}\Delta E_{200} + l_{200,100} = 0$$

18* $$a_{500,1010}\Delta N_{1010} + b_{500,1010}\Delta E_{1010} + a_{1010,500}\Delta N_{500} + b_{1010,500}\Delta E_{500} + l_{500,1010} = 0$$

RTK – 5 equazioni

19 $$a_{1000,100}\Delta N_{100} + b_{1000,100}\Delta E_{100} + l_{1000,100} = 0$$

20 $$a_{1000,300}\Delta N_{300} + b_{1000,300}\Delta E_{300} + l_{1000,300} = 0$$

21 $$a_{1000,400}\Delta N_{400} + b_{1000,400}\Delta E_{400} + l_{1000,400} = 0$$

22 $$a_{1000,500}\Delta N_{500} + b_{1000,500}\Delta E_{500} + l_{1000,500} = 0$$

23 $$a_{1000,1010}\Delta N_{1010} + b_{1000,1010}\Delta E_{1010} + l_{1000,1010} = 0$$

Distanze (da TS, RTK ecc.)

$$a_{ij}\Delta N_j + b_{ij}\Delta E_j + a_{ji}\Delta N_i + b_{ji}\Delta E_i + l_{ij} = 0$$

$$a_{ij} = \frac{N_j^0 - N_i^0}{(D_{ij}^0)^2} \qquad b_{ij} = \frac{E_j^0 - E_i^0}{(D_{ij}^0)^2} \qquad l_{ij} = 1 - \frac{D_{ij}}{D_{ij}^0}$$

$$a_{ji} = -a_{ij} \qquad b_{ji} = -b_{ji}$$

Calcolo di compensazione – equazioni generatrici

$$a_{ij}\Delta N_i + b_{ij}\Delta E_i + a_{ji}\Delta N_j + b_{ji}\Delta E_j + l_{ij} = 0$$

azimut

$$a_{ij}\Delta N_i + b_{ij}\Delta E_i + a_{ji}\Delta N_j + b_{ji}\Delta E_j + c_{ij}\Delta Z_i + l_{ij} = 0$$

direzioni

$$a_{ij}\Delta N_j + b_{ij}\Delta E_j + a_{ji}\Delta N_i + b_{ji}\Delta E_i + l_{ij} = 0$$

distanze

Sistema di 5 eq. generatrici di azimut, 6 eq. generatrici angolari, 12 eq. generatrici di distanze

Sistema di 23 **equazioni generatrici**, lineari non omogenee equidimensionate, nelle **16** incognite

ΔN_{100}, ΔE_{100}, ΔZ_{100}, ΔN_{101}, ΔE_{101} , ΔN_{200}, ΔE_{200}, ΔZ_{200}, ΔN_{300}, ΔE_{300}, ΔN_{400}, ΔE_{400}, ΔN_{500}, ΔE_{500}, ΔN_{1010}, ΔE_{1010}

Numero delle equazioni n (23) > numero delle incognite m (16) $\rightarrow$ sistema impossibile

Calcolo di compensazione – equazioni generate

$$a_{ij}\Delta N_i + b_{ij}\Delta E_i + a_{ji}\Delta N_j + b_{ji}\Delta E_j + l_{ij} = v_k \quad k = 1,\dots,5$$

$$a_{ij}\Delta N_i + b_{ij}\Delta E_i + a_{ji}\Delta N_j + b_{ji}\Delta E_j + c_{ij}\Delta Z_i + l_{ij} = v_k \quad k = 6,\dots,11$$

$$a_{ij}\Delta N_j + b_{ij}\Delta E_j + a_{ji}\Delta N_i + b_{ji}\Delta E_i + l_{ij} = v_k \quad k = 12,\dots,23$$

Sistema di 23 **equazioni generate**, lineari non omogenee equidimensionate, nelle 39 incognite **ΔN**, **ΔE**, **ΔZ**, v_k (16 incognite principali e 23 incognite scarti)

Numero delle equazioni n (23) < numero delle incognite m (39) → sistema indeterminato

v_k = residui (o scarti) di ciascuna equazione = $f(\Delta N_i, \Delta E_i, \Delta Z_i)$ $\quad k = 1,\dots,23; \quad i = 1,\dots,16$

Calcolo di compensazione – equazioni generate

$$a_{ij}\Delta N_i + b_{ij}\Delta E_i + a_{ji}\Delta N_j + b_{ji}\Delta E_j + l_{ij} = v_k \quad k = 1,\dots,5$$

$$a_{ij}\Delta N_i + b_{ij}\Delta E_i + a_{ji}\Delta N_j + b_{ji}\Delta E_j + c_{ij}\Delta Z_i + l_{ij} = v_k \quad \mathrm{k} = 6, \dots, 11$$

$$a_{ij}\Delta N_j + b_{ij}\Delta E_j + a_{ji}\Delta N_i + b_{ji}\Delta E_i + l_{ij} = v_k \quad \mathrm{k} = 12, 23$$

Sistema di 23 **equazioni generate**, lineari non omogenee equidimensionate, nelle 39 incognite
ΔN, ΔE, ΔZ, v_k

Principio dei Minimi Quadrati $\sum_1^{23} \mathrm{v}_\mathrm{k}^2 = [\mathrm{v}_\mathrm{k}^2] = \text{minimo}$

$$v_k = f(\Delta \mathrm{N}_i, \Delta \mathrm{E}_i, \Delta \mathrm{Z}_\mathrm{i}) \quad k = 1,\dots,23; \quad i = 1,\dots,16$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\delta}{\delta(\Delta \mathrm{N}_1)}[\mathrm{v}_\mathrm{k}^2] \\ \dfrac{\delta}{\delta(\Delta E_1)}[\mathrm{v}_\mathrm{k}^2] \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = 0$$

16 equazioni nelle 16 incognite principali

Calcolo di compensazione – sistema normale

A = matrice dei coefficienti
X = vettore delle incognite
L = vettore dei termini noti
V = vettore degli scarti

$$\boxed{A_{23,16} \cdot X_{16,1} + L_{23,1} = V_{23,1}}$$

equazioni generate

$$A^T_{16,23} A_{23,16} X_{16,1} + A^T_{16,23} L_{23,1} = A^T_{16,23} V_{23,1}$$

$$A^T_{16,23} \cdot V_{23,1} = 0$$

L C2

$$A^T_{16.23} A_{23,16} X_{16,1} + A^T_{16.23} L_{23,1} = 0$$

$$A^T_{16,23} A_{23,16} = D_{16,16}$$

$D_{16,16}$ = matrice normale
quadrata, simmetrica e definita positiva
(in diagonale principale somme di quadrati)
Le dimensioni dipendono dal numero delle incognite e non dal numero delle misure

$$\boxed{D_{16,16} X_{16,1} + A^T_{16,23} L_{23,1} = 0}$$

SISTEMA NORMALE
16 equazioni in 16 incognite!

Calcolo di compensazione – la stima delle incognite

$$\boxed{D_{16,16} X_{16,1} + A^T_{16,23} L_{23,1} = 0}$$

Moltiplicando da sx per D^{-1} = matrice inversa di D ($D^{-1}D=I$)

$$X_{16,1} + D^{-1}_{16,16} A^T_{16,23} L_{23,1} = 0$$

$$X_{16,1} = -D^{-1}_{16,16} A^T_{16,23} L_{23,1}$$

Soluzione = Modello funzionale

$$X_{16,1} = \begin{pmatrix} \Delta N_{100} \\ \Delta E_{100} \\ \Delta Z_{100} \\ \dots \\ \Delta N_{1010} \\ \Delta E_{1010} \end{pmatrix}$$

Variazioni di “coordinate”

$$N_{100} = N^0_{100} + \Delta N_{100}$$

$$E_{100} = E^0_{100} + \Delta E_{100}$$

…

…

“coordinate” compensate

Le correzioni di compensazione

Sostituendo le incognite nelle equazioni generate si possono calcolare gli scarti (o correzioni o residui) di compensazione v_k [rad]

$$\boxed{A_{23,16} \cdot X_{16,1} + L_{23,1} = V_{23,1}}$$

- Per le equazioni di azimut (1,…,5) e angolari (6, …, 11) gli scarti [rad] rappresentano le correzioni di compensazione delle corrispondenti osservazioni

- Per le equazioni di distanze (12, …, 23) la correzione di compensazione si ottiene moltiplicando lo scarto [rad] per la distanza approssimata per cui era stata divisa l'equazione per renderla dimensionalmente omogenea con le altre

La stima degli errori – errore medio dell'unità di peso

Per completare il calcolo di compensazione, dopo aver geometrizzato il problema e stimato le incognite, occorre calcolare gli errori medi

errore medio dell'unità di peso

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{[v_k^2]}{n-m}} \quad \text{[rad]}$$

n = numero delle equazioni
m = numero delle incognite
n-m = ridondanza globale

è una stima sintetica della qualità del lavoro

?

$$[v_k^2] = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_{23}^2 = V^T V$$

Nell'esempio
n = 23
m = 16
n-m = 7

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{[v_k^2]}{23-16}} = \sqrt{\frac{[v_k^2]}{7}} \quad \text{[rad]}$$

La stima degli errori - matrice di varianza-covarianza

Ricordando: $\sigma_0^2 = \dfrac{[v_k^2]}{n-m} = \dfrac{[v_k^2]}{23-16}$

$A^T_{16,23} \cdot A_{23,16} = D_{16,16}$

$D_{16,16}$ = matrice normale

$D^{-1}_{16,16}$ = matrice inversa di D

Metodi, strumenti, misure

Geometria del problema

$$C_{xx} = \sigma_0^2 D^{-1} =$$

$$= \sigma_0^2 \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & \dots & d_{1,16} \\ \dots & d_{2,2} & \dots & d_{2,16} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & d_{16,16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0^2 d_{1,1} & \sigma_0^2 d_{1,2} & \dots & \sigma_0^2 d_{1,16} \\ \dots & \sigma_0^2 d_{2,2} & \dots & \sigma_0^2 d_{2,16} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \sigma_0^2 d_{16,16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\Delta N_{100}} & \sigma_{\Delta N_{100}\Delta E_{100}} & \dots & \sigma_{\Delta N_{100}\Delta E_{1010}} \\ \dots & \sigma^2_{\Delta E_{100}} & \dots & \sigma_{\Delta E_{100}\Delta E_{1010}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \sigma^2_{\Delta E_{1010}} \end{pmatrix}$$

$\sigma_{\Delta N_1} = \sigma_{N_1}$

$\sigma_{\Delta E_1} = \sigma_{E_1}$

$\sigma_{\Delta N_1 \Delta E_1} = \sigma_{N_1 E_1}$

… … …

$$C_{xx} = \sigma_0^2 D^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{N_{100}} & \sigma_{N_{100}E_{100}} & \dots & \sigma_{N_{100}E_{1010}} \\ \dots & \sigma^2_{E_{100}} & \dots & \sigma_{E_{100}E_{1010}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \sigma^2_{E_{1010}} \end{pmatrix}$$

Matrice di varianza-covarianza

=

MODELLO STOCASTICO

La stima degli errori - matrice di varianza-covarianza

$$C_{xx} = \sigma_0^2 D_{16,16}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_0^2 d_{1,1} & \sigma_0^2 d_{1,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_0^2 d_{1,16} \\ \cdots & \sigma_0^2 d_{2,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_0^2 d_{2,16} \\ \cdots & \cdots & \sigma_0^2 d_{3,3} & \sigma_0^2 d_{3,4} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_0^2 d_{4,4} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_0^2 d_{16,16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{N_{100}}^2 & \sigma_{N_{100}E_{100}} & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_{N_{100}E_{1010}} \\ \cdots & \sigma_{E_{100}}^2 & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_{E_{100}E_{1010}} \\ \cdots & \cdots & \sigma_{Z_{100}}^2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_{E_{1010}}^2 \end{pmatrix}$$

Gli errori medi delle incognite si ottengono osservando che:
- i loro quadrati (varianze) sono proporzionali agli elementi della diagonale principale della matrice inversa D^{-1}
- il fattore di proporzionalità è l'errore medio dell'unità di peso σ_0^2

$$\sigma_{N_{100}}^2 = \sigma_0^2 d_{1,1}$$
$$\sigma_{E_{100}}^2 = \sigma_0^2 d_{2,2}$$
$$\sigma_{Z_{100}}^2 = \sigma_0^2 d_{3,3}$$
…

varianze

Le correlazioni tra le incognite (covarianze) si ottengono osservando che:
- sono proporzionali agli elementi simmetrici fuori diagonale principale della matrice inversa D^{-1}
- il fattore di proporzionalità è l'errore medio dell'unità di peso σ_0^2

$$\sigma_{N_1E_1} = \sigma_0^2 d_{1,2}$$
$$\sigma_{N_2E_2} = \sigma_0^2 d_{3,4}$$

covarianze

Gli errori sono compagni di viaggio inseparabili della ragione: non possiamo evitarli ma la ragione stessa ci può fornire gli strumenti per evitare che questi fastidiosi ed inopportuni compagni ci conducano su strade sbagliate.

E' nella nostra responsabilità imparare a conoscere e ad usare questi preziosi strumenti.

BUON FINE CORSO!

Luciano Surace

e-mail: luciano.surace@gmail.com

https://www.lucianosurace.it

https://www.twitter.com/luxur49