

## Esercizi di approfondimento – Modulo 1 – Lezione 3

a cura del geom. Gianni Rossi

Con questo documento desidero proseguire nel cercare di dare un possibile contributo ad una maggior comprensione e approfondimento su quanto abbiamo appreso dal Prof. Renzo Maseroli nella lezione 3 del modulo 1 del corso. Come già fatto per la lezione precedente, cercherò di rendere il tutto più stimolante calando le nozioni viste al corso in una situazione familiare come quella di un rilievo GPS elaborato con il software Pregeo usato quotidianamente da molti colleghi.

### Rilievi GPS, calcolo della baseline

Riprendo quindi in questa analisi l'esempio di rilievo GPS che avevo già trattato al seminario propedeutico del corso tenuto il 10/10/2018<sup>1</sup>. Si tratta di un rilievo GPS volutamente limitato ad un solo punto, denominato 2000, rilevato a partire dalla base GPS, denominata 1000. Il libretto Pregeo di questo rilievo è presente nel file 181000.DAT abbinato a questo documento e, oltre alla riga iniziale 0, contiene le seguenti righe (per carenza di spazio qui la riga 2 finale va accapo, ma ovviamente è scritta tutta di seguito in Pregeo):

```

9 | 0 | 10 | 20 | 0 | PREGEO 10.00-G, APAG 2.08 | FR | TOPCON HIPER 2 APPOGGIATO A RETE GNSS |
1 | 1000 | 4392952.05, 930305.90, 4514492.52 | 0.000 |
6 | L2 | 21092018-10:02 | 21062017-10:02 | RTK | PDOP=1 |
2 | 2000 | -962.273, -5763.177, 2089.183 | 0.00046789, 0.00008783, 0.00030193,
                                     0.00008358, 0.00006960, 0.00035201 | PDOP=2 | 0 |

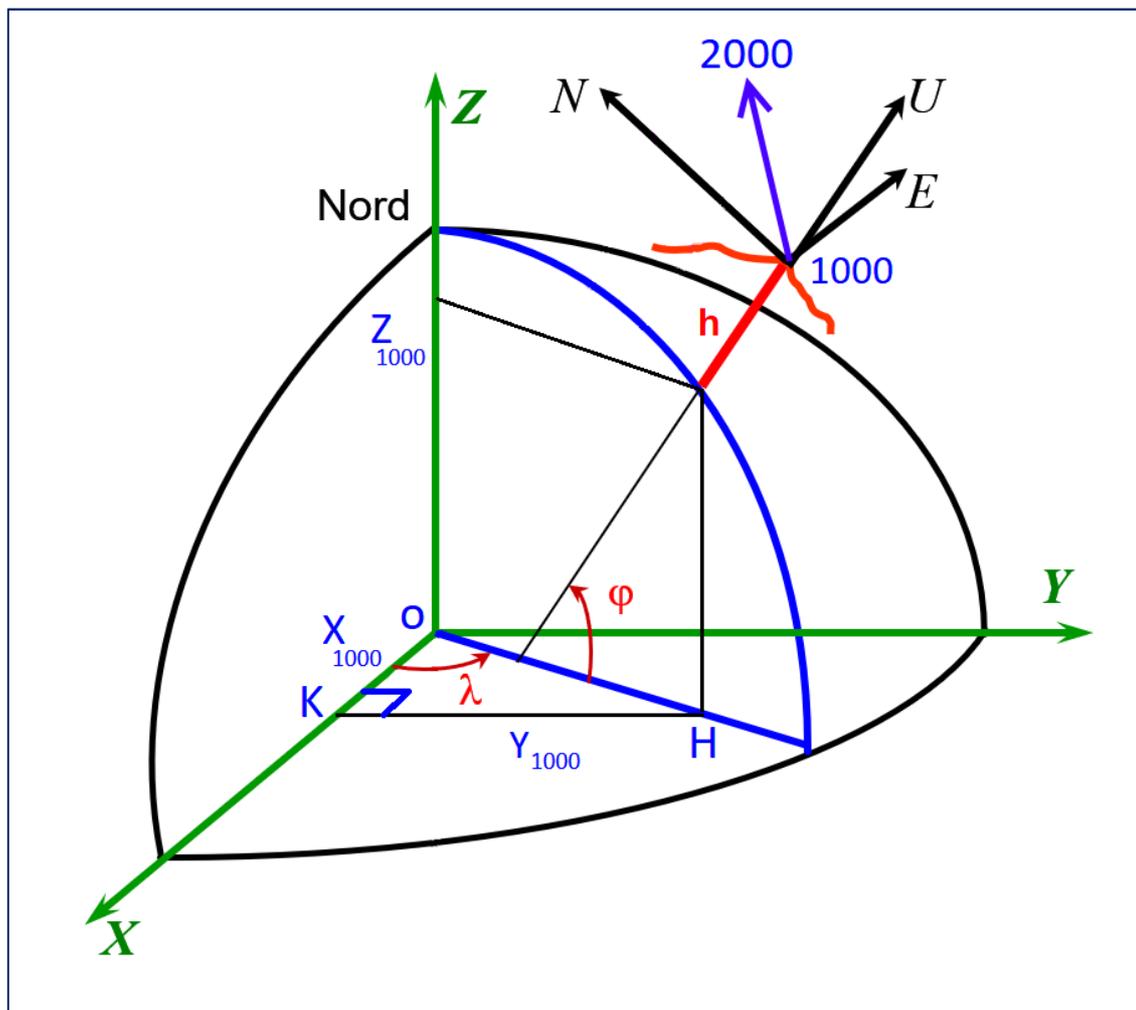
```

La riga 9, oltre alla descrizione finale della strumentazione utilizzata, contiene alcune informazioni tecniche che servono a Pregeo per le sue elaborazioni. Tra questi dati mi preme solo far notare i campi evidenziati in rosso (il 1° e il 4° dopo il codice di riga), che corrispondono rispettivamente alla quota media sul livello del mare del rilievo (in genere riferita al punto di emanazione) e alla *Est media*, cioè la coordinata Est dello stesso punto rispetto al sistema di riferimento cartografico (nel caso in esame Cassini-Soldner). Per l'esempio che svilupperemo questi due valori vanno infatti entrambi imposti pari a zero in modo da evitare che Pregeo applichi le compensazioni inerenti alla quota (riduzione al livello medio del mare) e alla proiezione cartografica (parametri di trasformazione relativi al sistema catastale). In caso contrario Pregeo applicherebbe tali compensazioni e questo ci impedirebbe di avere un raffronto effettivo con i calcoli che andremo a sviluppare.

Per quanto riguarda invece le successive righe di rilievo, vediamo di riassumere i dati contenuti nelle stesse facendo riferimento alla Figura 1 a pagina seguente. In questa disamina tralasciamo le informazioni inerenti ai parametri della rilevazione, come il *PDOP* (riga 6) e la matrice di varianza e co-varianza, valori che avremo modo di sviscerare nel seguito del corso. La riga 1 riporta le coordinate cartesiane della base GPS 1000 nel sistema geocentrico WGS84 utilizzato dal GPS, coordinate che risultano quindi essere:

Coordinate geocentriche della base GPS	$X_{1000}$	4392952.05
	$Y_{1000}$	930305.90
	$Z_{1000}$	4514492.52

<sup>1</sup> Il seminario è del tutto gratuito, chi desiderasse vederlo (o rivederlo) lo trova sul sito [www.corsigeometri.it](http://www.corsigeometri.it) cliccando il bottone *Corsi gratuiti* in alto.



**Figura 1** – Lo schema geometrico della baseline GPS che vogliamo calcolare.

La riga 2 riporta invece i delta X-Y-Z, sempre riferiti al sistema geocentrico WGS84, tra la base 1000 e il punto 2000, cioè le componenti cartesiane del vettore nello spazio che collega la base 1000 al punto 2000:

Delta geocentrici 1000-2000	$d_x$	-962.273
	$d_y$	-5763.177
	$d_z$	2089.183

Elaborando con Pregeo questo libretto otteniamo i risultati riportati nella tabella che segue nella quale, a differenza dell'impostazione di Prego, ho adottato la classica sequenza con la Est prima e la Nord dopo:

Punto	Est	Sqm E	Nord	Sqm N	Quota	Sqm Q
1000	0.005	0.004	-0.003	0.002	0.000	0.000
2000	-5438.770	0.004	2987.391	0.002	-11.684	0.0305

Naturalmente queste coordinate calcolate da Pregeo sono nel sistema *Euleriano* che il Prof. Maseroli ci ha spiegato alla lezione (slide 31), cioè quel sistema che ha origine nel punto di emanazione del rilievo, nel nostro caso la base 1000, ha l'asse *U* (iniziale del termine inglese *Up*, cioè *Su*) lungo la normale ellissoidica e gli assi *E* ed *N* giacenti sul piano dell'orizzonte di

$P$ , cioè il piano passante per  $P$  e perpendicolare alla normale, con l'asse  $N$  nella direzione del meridiano di  $P$  e l'asse  $E$  ortogonale a  $N$  in senso destrorso.

Data questa definizione del sistema euleriano, cioè con l'origine sul punto 1000, resta da capire come mai Pregeo restituisca per questo punto valori di qualche millimetro, anziché esattamente pari a zero, pur non essendoci alcuna iper-determinazione, cioè ridondanza di misure. Ma questa domanda andrebbe rivolta agli sviluppatori di Pregeo.

Cerchiamo invece di capire come Pregeo ha calcolato le coordinate del punto 2000.

Il Prof. Maseroli ce l'ha spiegato proprio nell'ultima slide (la 37) della lezione, illustrandoci la formula matriciale semplificata<sup>2</sup> da utilizzare quando si vuole trasformare i delta geocentrici nei delta euleriani (N.B.: nelle espressioni che seguono i prodotti sono indicati senza alcun segno relativo all'operatore ed il seno è indicato con la notazione internazionale *sin* per sfruttare l'impostazione del software di scrittura che utilizzo):

$$\begin{bmatrix} \Delta E \\ \Delta N \\ \Delta U \end{bmatrix} = J_0 \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

Dove la matrice di rotazione<sup>3</sup>  $J_0$  è quella spiegata dal Prof. Maseroli nella slide 34:

$$\begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix}$$

Pr cui la formula completa è:

$$\begin{bmatrix} \Delta E \\ \Delta N \\ \Delta U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \quad [1]$$

Ma di tutti questi dati noi conosciamo soltanto i  $\Delta X$ - $\Delta Y$ - $\Delta Z$ ; mentre non conosciamo invece gli angoli di longitudine  $\lambda$  e di latitudine  $\varphi$ , e pertanto non siamo in grado di eseguire questo calcolo. Per farlo dobbiamo ricavare i valori di longitudine e latitudine a partire dalle coordinate geocentriche note della base 1000.

Se guardiamo nuovamente la Figura 1 a pagina precedente, possiamo renderci conto di come esista un'esatta corrispondenza nell'esprimere la posizione del punto 1000 nei due modi seguenti:

1. tramite le coordinate geocentriche:  $X_{1000}, Y_{1000}, Z_{1000}$ ;
2. tramite le coordinate geografiche: longitudine  $\lambda$ , latitudine  $\varphi$ , e altezza ellissoidica  $h$ , cioè la distanza tra il punto sulla superficie e l'intersezione della sua normale con l'ellissoide.

Ma allora, se esiste questa corrispondenza, significa che noi possiamo passare da una rappresentazione all'altra conoscendone le formule appropriate. Ovviamente al corso non abbiamo ancora affrontato questa trasformazione, che sarà probabilmente trattata al modulo 2 dedicato alla Geodesia. Io quindi mi limiterò qui di seguito a darne una illustrazione sommaria al solo scopo di portare a termine il calcolo della baseline che mi sono riproposto di sviluppare. N.B.: tutti i calcoli che seguono sono sviluppati nel file Excel *GPS\_Baseline.xlsx* abbinato a questo documento.

---

2 Semplificata dal fatto che, agendo direttamente sui delta, si eliminano le traslazioni ed è quindi sufficiente calcolare le sole rotazioni tra i due sistemi.  
 3 Quella complessiva data dalle due rotazioni viste al corso.

Dei due dati che ci servono,  $\lambda$  e  $\varphi$  (l'altezza ellissoidica  $h$  non è necessaria ai fini del nostro calcolo), l'unico semplice da calcolare è la longitudine  $\lambda$ . Infatti, sempre con riferimento alla Figura 1, osserviamo il triangolo  $OKH$ , rettangolo in  $K$ , formato sul piano  $XY$  dalla proiezione  $H$  del piede della normale ellissoidica del punto 1000 (intersezione della normale con l'ellissoide). In questo triangolo rettangolo si ha che:

$$\tan \lambda = \frac{KH}{OK} = \frac{Y_{1000}}{X_{1000}} = \frac{930305.9}{4392952.05} = 0.21177238$$

Da cui otteniamo l'angolo in radianti:

$$\lambda = \arctan 0.21177238 = 0.2086891^r$$

che trasformiamo in gradi centesimali applicando la solita proporzione:

$$0.2086891^r : \pi = \lambda^g : 200$$

$$\lambda^g = 0.2086891^r \cdot \frac{200}{\pi} = 13.28556103^g$$

Calcolare la latitudine  $\varphi$  è molto più complicato. Esistono vari metodi per farlo, alcuni dei quali prevedono calcoli interattivi, che includono cioè una serie di istruzioni che si ripetono per un certo numero di cicli, un processo che sarebbe ovviamente difficile da esporre in un documento come questo. Nel calcolo che segue utilizzerò quindi le formule di B.R. Bowring, formule che, seppur abbastanza complesse, hanno il vantaggio di essere in forma chiusa, cioè senza la necessità di iterazioni.

Per applicare queste formule bisogna partire dai parametri dell'ellissoide che il Prof. Maseroli ci ha spiegato alla slide 22, valori che per il WGS84 sono riportati nella seguente tabella:

Parametri dell'ellissoide WGS84			
	Semiassse maggiore	<b>a</b>	6378137.000
	Semiassse minore	<b>b</b>	6356752.314
Eccentricità prima al quadrato	$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$	<b>e<sup>2</sup></b>	0.0066943800043
Eccentricità seconda al quadrato	$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$	<b>e'<sup>2</sup></b>	0.0067394967566

Con questi parametri, più le coordinate geocentriche del punto 1000, bisogna poi calcolarsi i seguenti due valori intermedi:

1. Il raggio del parallelo  $r$  (OH in Figura 1):

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$r = \sqrt{4392952.05^2 + 930305.9^2} = 4490378.245$$

2. La latitudine ridotta  $\vartheta$ :

$$\vartheta = \arctan \frac{a Z}{b r}$$

$$\vartheta = \arctan \frac{6378137.000 \cdot 4514492.52}{6356752.314 \cdot 4490378.245} = 0.78975525^r$$

Valore questo che, ai fini dei calcoli successivi, possiamo tenerci in radianti.

A questo punto, possiamo calcolarci la latitudine  $\varphi$  con questa formula:

$$\varphi = \arctan \frac{Z + e'^2 b \sin^3 \vartheta}{r - e^2 a \cos^3 \vartheta}$$

$$\varphi = \arctan \frac{4514492.52 + 0.0067394967566 \cdot 6356752.314 \cdot \sin^3 0.78975525^r}{4490378.245 - 0.0066943800043 \cdot 6378137.000 \cdot \cos^3 0.78975525^r}$$

$$\varphi = 0.79143435^r = 50.38427533^g$$

Per completezza, vediamo anche la formula per il calcolo dell'altezza ellissoidica  $h$ :

$$h = r \cos \varphi + Z \sin \varphi - a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

$$h = 4490378.245 \cdot \cos 0.78975525^r + 4514492.52 \cdot \sin 0.78975525^r$$

$$- 6378137.000 \cdot \sqrt{1 - 0.0066943800043 \sin^2 0.78975525^r}$$

$$h = 67.552$$

Bene, calcolate quindi longitudine  $\lambda$  e latitudine  $\varphi$ , possiamo finalmente applicare la formula matriciale [1] a pag. 3 come visto al corso, formula che per comodità ripeto anche qui:

$$\begin{bmatrix} \Delta E \\ \Delta N \\ \Delta U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\sin 0.2086891^r & \cos 0.2086891^r & 0 \\ -\sin 0.79143435^r \cos 0.2086891^r & -\sin 0.79143435^r \sin 0.2086891^r & \cos 0.79143435^r \\ \cos 0.79143435^r \cos 0.2086891^r & \cos 0.79143435^r \sin 0.2086891^r & \sin 0.79143435^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta E \\ \Delta N \\ \Delta U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -962.273 \\ -5763.177 \\ 2089.183 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta E \\ \Delta N \\ \Delta U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.207177625 & 0.978303343 & 0 \\ -0.69592792 & -0.14737831 & 0.7028257 \\ 0.687576732 & 0.145609759 & 0.711362099 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -962.273 \\ -5763.177 \\ 2089.183 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta E \\ \Delta N \\ \Delta U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5438.774 \\ 2987.371 \\ -14.646 \end{bmatrix}$$

I tre valori trovati qui sopra, pur essendo dei "delta", sono in realtà le coordinate topografiche piane del punto 2000 perché in topografia si assume il *punto di emanazione del rilievo*, nel nostro caso la base 1000, quale origine del sistema euleriano.

Confrontiamo ora questi risultati con quelli che avevamo riscontrato in Pregeo e che per comodità riporto nuovamente qui:

2000	Est	Nord	Quota
Pregeo	-5438.770	2987.391	-11.684
Calcolo	-5438.774	2987.371	-14.646

Come possiamo notare, la Est e la Nord coincidono quasi perfettamente (con un'approssimazione di soli 2 cm sulla Nord), mentre la quota differisce di circa 3 mt.

*A cosa è dovuta questa differenza?*

Ovviamente all'errore di sfericità terrestre. Come abbiamo detto, infatti, il sistema euleriano è basato sul piano orizzontale *EN* passante per il punto 1000. Ma la superficie terrestre non è un piano, è una superficie curva, e pertanto l'assunzione di considerarla un piano comporta un'approssimazione. Per le precisioni richieste dai rilievi catastali, che si svolgono all'interno del campo topografico (25 km), questa approssimazione è del tutto trascurabile per le distanze planimetriche. Non lo è invece mai per le quote, per le quali l'errore di sfericità incide in misura significativa già a distanze di qualche centinaia di metri. Senza voler entrare nel merito di questo errore, che sarà sicuramente oggetto del modulo 2 del corso, mi limito quindi a calcolarlo con la formula classica imparata alla scuola di geometra:

$$e_{sf} = \frac{d^2}{2R}$$

Dove  $d$  è la distanza planimetrica tra i punti 1000 e 2000, mentre  $R$  è il raggio medio terrestre. La prima è facilmente calcolabile applicando il teorema di Pitagora alle coordinate Est e Nord appena trovate, mentre per  $R$  assumiamo il valore di 6377000 mt. Per cui l'errore di sfericità risulta:

$$d = \sqrt{-5438.774^2 + 2987.371^2} = 6205.211$$

$$e_{sf} = \frac{6205.211^2}{2 \cdot 6377000} = 3.019$$

Sommando algebricamente questo valore al  $\Delta U$  sopra calcolato, otteniamo la quota corretta  $Q$  del punto 2000:

$$Q = \Delta U + e_{sf} = -14.646 + 3.019 = -11.627$$

Risultato che, come possiamo notare, coincide con quello di Pregeo a meno di qualche cm dovuto alle diverse impostazioni di calcolo.

Nel seminario propedeutico del corso tenuto il 10/10/2018 avevo messo in evidenza anche un ulteriore aspetto legato alla trasformazione di una baseline GPS in coordinate topografiche piane. Avevo cioè invertito il vettore della baseline stessa, considerando il punto 2000 quale base (punto di emanazione del rilievo) e il punto 1000 quale punto rilevato.

Per fare questo, ho dapprima calcolato le coordinate geocentriche della 2000 sommando algebricamente a quelle della 1000 i delta X-Y-Z:

	Geocentriche 1000	Delta	Geocentriche 2000
X	4392952.050	-962.273	4391989.777
Y	930305.900	-5763.177	924542.723
Z	4514492.520	2089.183	4516581.703

Dopodiché, ho cambiato di segno ai delta X-Y-Z e ho redatto il libretto Pregeo della baseline così invertita (questo libretto è presente nel file 182000.DAT abbinato a questo documento):

```
1 | 2000 | 4391989.78, 924542.72, 4516581.70 | 0.000 |
6 | L2 | 07102018-04:09 | 00000-04:09 | RTK | PDOP=0 |
2 | 1000 | 962.273, 5763.177, -2089.183 | 0.00046789, 0.00008783, 0.00030193,
    0.00008358, 0.00006960, 0.00035201 | PDOP=0 | 0.000 |
```

Poi ho eseguito l'elaborazione di Pregeo trovando questi risultati:

Punto	Est	Sqm E	Nord	Sqm N	Quota	Sqm Q
2000	0.005	0.004	-0.002	0.002	0.000	0.000
1000	5441.344	0.004	-2982.700	0.002	11.684	0.0305

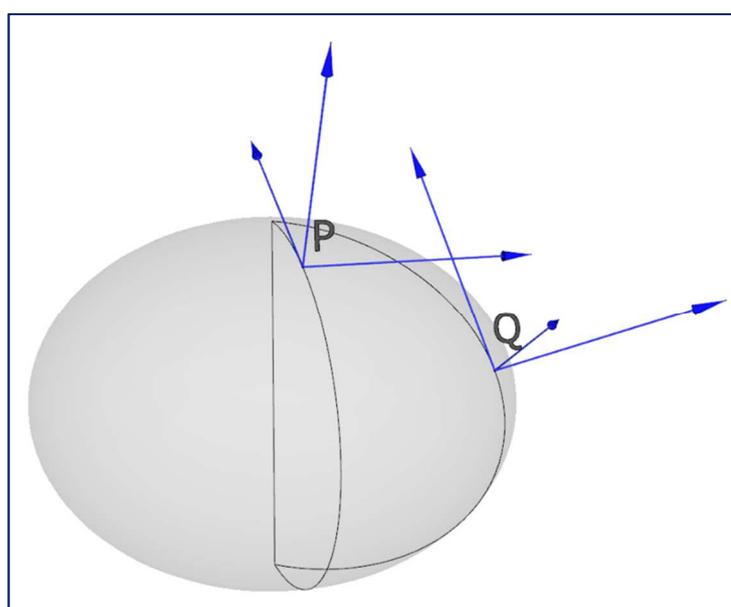
Infine ho confrontato le coordinate delle due baseline, riscontrando che solo la quota non presentava differenza, mentre Est e Nord risultavano diverse di valori significativi come mostra la tabella che segue.

Al seminario avevo quindi mostrato che questa discrepanza è dovuta al fatto che i due sistemi euleriani con origine in 1000 e 2000 (P e Q nella Figura 2 qui a lato) non hanno gli assi paralleli tra loro. Infatti i due assi Nord hanno ciascuno la direzione del proprio meridiano passante per il punto, e ovviamente i due meridiani convergono. Inoltre, essendo tangenti all'ellissoide, i due piani sono sghembi uno rispetto all'altro. Ne consegue che il punto Q espresso nel sistema di P ha coordinate diverse dal punto Q espresso nel sistema di P.

Naturalmente questi aspetti saranno dettagliatamente trattati dai docenti nel modulo 2 dedicato alla Geodesia.

A titolo di esercitazione, propongo ai colleghi di ripetere i calcoli visti sopra per calcolare la baseline 2000-1000.

Punto	Est	Nord	Quota
2000 da 1000	-5438.770	2987.391	-11.684
1000 da 2000	5441.344	-2982.700	11.684
Differenza	2.574	4.691	0.000



**Figura 2** – Due sistemi euleriani definiti su altrettanti punti sono sghembi uno rispetto all'altro.