

Esercizi di approfondimento – Modulo 1 – Lezione 2

a cura del geom. Gianni Rossi

Con questo documento cercherò di illustrare come si possono mettere in pratica gli strumenti matematici trattati dal Prof. Renzo Maseroli nella lezione 2 - modulo 1 del corso (*Richiami di Matematica e Teoria degli errori*). Lo farò sviluppando due calcoli relativi ad un lavoro topografico realmente svolto, in modo da rendere evidente l'effettiva utilità di quanto studiato al corso. Il lavoro è la riconfinazione trattata al corso *Riconfinazioni, l'evoluzione delle tecniche risolutive* tenutosi il 17/10/2018 e consiste nella ricostruzione di un confine cartografico eseguita dal collega geom. Sergio Ivaldi di Alessandria.

Sono infatti convinto che, vedendo all'opera gli strumenti matematici su una situazione reale di lavoro, diventa tutto molto più "attraente" e, in molti casi, la "noia" tipica della sola teoria viene spazzata via dalla voglia di vedere "come si fa".

1. Distanza del confine dal poligono di inquadramento

Premessa: per seguire efficacemente l'esempio che segue, si faccia riferimento, oltre che al presente documento, anche ai seguenti file:

- *Distanza_confine.dwg*: è il disegno CAD del caso trattato e serve alla verifica grafica dei calcoli algebrici sviluppati.
- *Distanza_confine.xlsx*: è il foglio di calcolo del quale mi sono avvalso per sviluppare i calcoli stessi.

Nella lezione 2 il Prof. Maseroli ci ha spiegato un efficace metodo algebrico per risolvere il problema geometrico di trovare la distanza di un punto da una retta, un'esigenza spesso presente in alcune attività topografiche. Nelle riconfinazioni, ad esempio, è necessario determinare la distanza dei punti del confine dal poligono di inquadramento formato dai punti omologhi mappa-rilievo, punti che permettono di risolvere la ricostruzione di un confine cartografico grazie alla rototraslazione a 4 parametri (altra procedura trattata alla lezione 2 e che vedremo nell'esempio successivo). Il calcolo di tale distanza serve infatti a verificare che il confine non sia extrapolato, rispetto al poligono, di una misura che vada oltre il limite di tolleranza dettato dalla letteratura tecnica.

Naturalmente in questa circostanza è necessario verificare la distanza di tutti i punti di confine esterni al poligono rispetto a tutti i lati del poligono stesso. Nella letteratura tecnica in materia di geometria analitica esistono sofisticati algoritmi (basati sul calcolo vettoriale visto alla lezione 1) che risolvono il problema con un'unica elaborazione. Tuttavia, per mettere in pratica quanto visto al corso, noi possiamo ridurre il problema al calcolo della distanza di un solo punto del confine rispetto ad uno solo dei lati. Basterà poi ripetere lo stesso procedimento per tutti gli altri punti / lati.

Nel lavoro di esempio citato in premessa la situazione è quella di Figura 1: il poligono di inquadramento è disegnato in blu, mentre il confine è costituito dalle due polilinee nere a Sud-Ovest che si intersecano a forma di croce. Ai fini di questo esempio, prendiamo quindi in considerazione il lato obliquo inferiore del poligono ed il punto del confine più lontano da esso, come illustrato in Figura 2, dove sono disegnati anche gli assi cartesiani del sistema locale del rilievo.

La nostra situazione di partenza è dunque la seguente: conosciamo le coordinate dei punti A, B, P, e vogliamo calcolare la distanza del punto P dal segmento AB, cioè la lunghezza PH della sua perpendicolare sul segmento stesso.

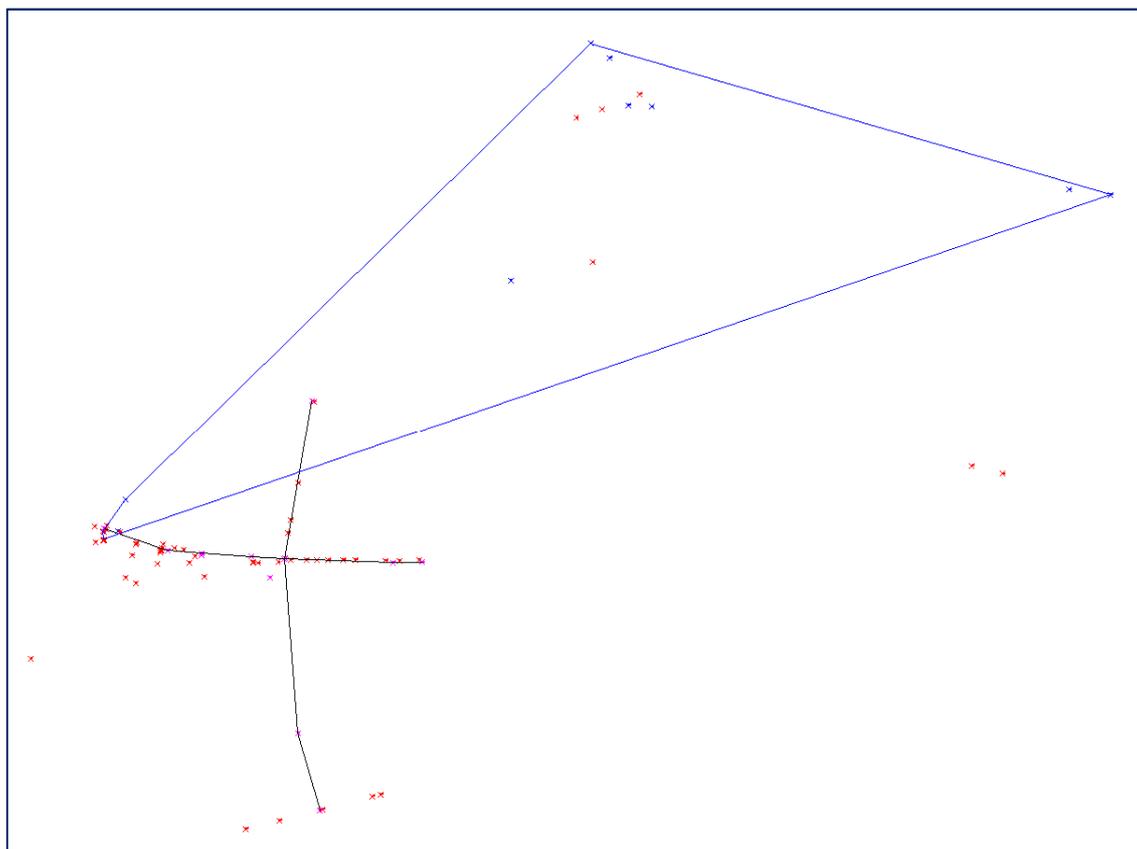


Figura 1 – Il poligono di inquadramento e il confine (quasi interamente esterno).

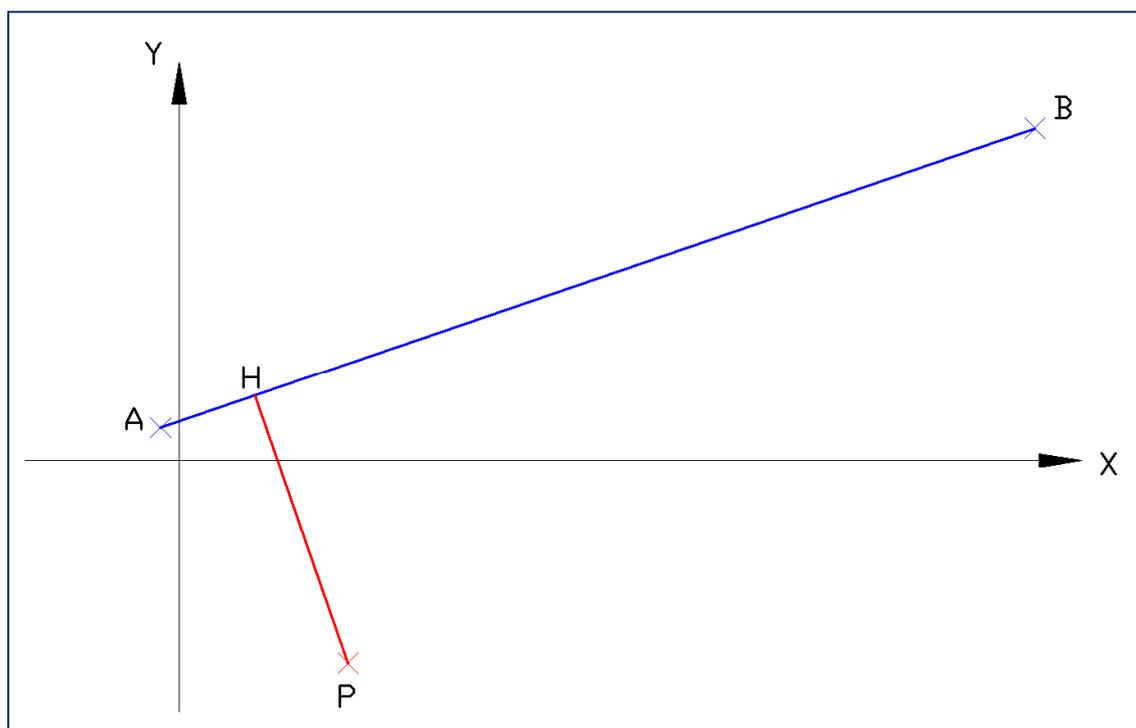


Figura 2 – Il problema da risolvere: trovare la distanza PH.

Questa situazione è leggermente diversa da quella vista al corso (slide 19 del Prof. Maseroli), dove il problema era quello di trovare la stessa distanza ma rispetto ad una retta intera. Qui invece a noi interessa la distanza minima del punto P rispetto al solo segmento AB. Tuttavia, nel caso in esame le due fattispecie coincidono perché la proiezione di P cade sul segmento AB. Se così non fosse, cioè se la proiezione di P cadesse a Ovest di A, oppure a Est di

B, la distanza sarebbe molto semplicemente PA o PB e basterebbe calcolarla applicando il teorema di Pitagora sulla differenza delle rispettive coordinate.

Le coordinate dei tre punti (nel sistema locale del rilievo) sono riportate nella tabella che segue¹. Procediamo quindi con il calcolo mettendo in pratica quanto appreso al corso.

Punto	X	Y
A	-13.055	23.234
B	599.012	235.014
P	118.202	-142.523

Per prima cosa dobbiamo trovare l'equazione della retta passante per i due punti A e B. Come abbiamo visto al corso (slide 17), tale equazione si esprime così:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$

Sostituendo i valori delle coordinate, abbiamo:

$$\frac{y - 23.234}{235.014 - 23.234} = \frac{x - (-13.055)}{599.012 - (-13.055)}$$

$$\frac{y - 23.234}{211.78} = \frac{x - (-13.055)}{612.067}$$

$$612.067 y - 612.067 \cdot 23.234 = 211.78 x + 13.055 \cdot 211.78$$

$$612.067 y - 14220.765 = 211.78 x + 2764.788$$

$$612.067 y = 211.78 x + 2764.788 + 14220.765$$

$$612.067 y = 211.78 x + 16985.553$$

$$y = \frac{211.78 x}{612.067} + \frac{16985.553}{612.067}$$

$$y = 0.346 x + 27.751$$

Questa qui sopra è dunque l'equazione della retta AB espressa nella forma canonica:

$$y = m x + n$$

e ci dà modo di verificare alcuni concetti visti al corso. Abbiamo infatti appreso che:

m è il coefficiente angolare e rappresenta l'inclinazione della retta, essendo la tangente che la stessa forma con il verso positivo dell'asse X;

n è l'ordinata del punto d'intersezione della retta con l'asse Y.

Con riferimento alla Figura 3 che segue, vediamo se nel nostro caso queste definizioni sono rispettate.

¹ Per attinenza con il corso, le indichiamo con X = Est e Y = Nord.

Per farlo misuriamo nel disegno CAD (layer *QUOTATURE*) la distanza tra l'origine degli assi e l'intersezione del segmento AB con l'asse Y. Troviamo esattamente il valore calcolato:

27.751

Poi prolunghiamo il segmento AB a partire da A fino ad intersecare l'asse delle X e misuriamo l'angolo formato tra le due rette. Troviamo il valore (espresso in gradi centesimali):

21.2067 g

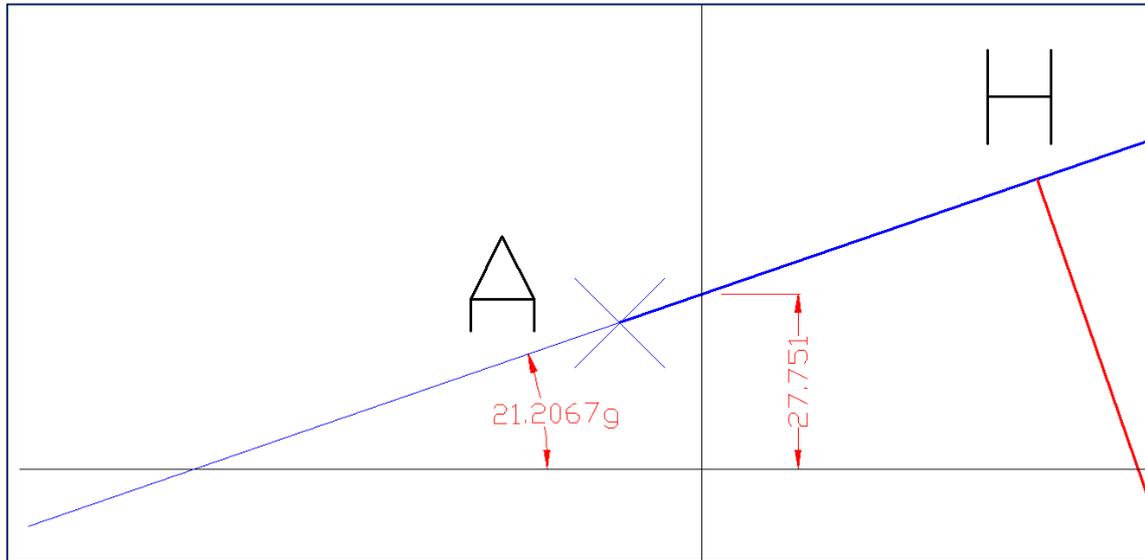


Figura 3 – La verifica di correttezza dei parametri dell'equazione della retta AB.

Per verificare se corrisponde al coefficiente angolare sopra calcolato per la retta AB, lo trasformiamo in radianti applicando la proporzione:

$$21.2067 : 200 = \alpha^r : \pi$$

Da cui si ottiene:

$$\alpha^r = 21.2067 \cdot \frac{\pi}{200} = 0.333$$

Calcoliamo ora la tangente di questo angolo espresso in radianti:

$$\tan(0.333) = \mathbf{0.346}$$

e constatiamo la corrispondenza esatta con il valore del coefficiente angolare calcolato per la retta AB. Il che ci conferma la bontà dei calcoli svolti.

Procediamo ora nel trovare l'equazione della retta PH perpendicolare ad AB e passante per il punto P. Al corso abbiamo visto (slide 14) che l'equazione del fascio di rette passanti per P è:

$$y - y_P = m(x - x_P) \quad [1]$$

e che, tra tutte queste (infinite) rette, quella perpendicolare alla retta data è la retta che ha il coefficiente angolare pari all'inverso e reciproco di questa. Nel nostro caso la retta AB ha coefficiente angolare:

$$m_{AB} = 0.346$$

Quindi il coefficiente angolare della retta PH sarà:

$$m_{PH} = -\frac{1}{0.346} = -2.89$$

Quindi, sostituendo nella [1] questo valore e quelli delle coordinate di P, abbiamo:

$$y - (-142.523) = -2.89 (x - 118.202)$$

$$y + 142.523 = -2.89 x + 2.89 \cdot 118.202$$

$$y + 142.523 = -2.89 x + 341.617$$

$$y = -2.89 x + 341.617 - 142.523$$

$$y = -2.89 x + 199.094$$

Anche in questo caso possiamo verificare la bontà del calcolo direttamente dal disegno CAD, come mostrato dalla Figura 4 qui a lato. Per quanto riguarda il coefficiente angolare, questo è ovviamente pari all'angolo complementare rispetto a quello della retta AB, come ci ha spiegato al corso il Prof. Maseroli (slide 11) e quindi il suo valore assoluto, espresso in gradi centesimali, risulta pari a:

$$100 - 21.2067 = 78.7933$$

Qui vale la pena di precisare il nesso geometrico tra il segno dei coefficienti angolari delle due rette e la direzione degli angoli che le stesse formano con il verso positivo dell'asse X. Il coefficiente angolare della retta AB è positivo perché l'angolo di $21.2067g$ sotteso con il verso positivo dell'asse X gira in senso antiorario, in questo caso si dice che la retta ha *pendenza positiva* perché è inclinata verso destra rispetto all'asse Y (è crescente da sinistra verso destra). Viceversa il coefficiente angolare della retta PH è negativo perché l'angolo di $78.7933g$ sotteso con il verso positivo dell'asse

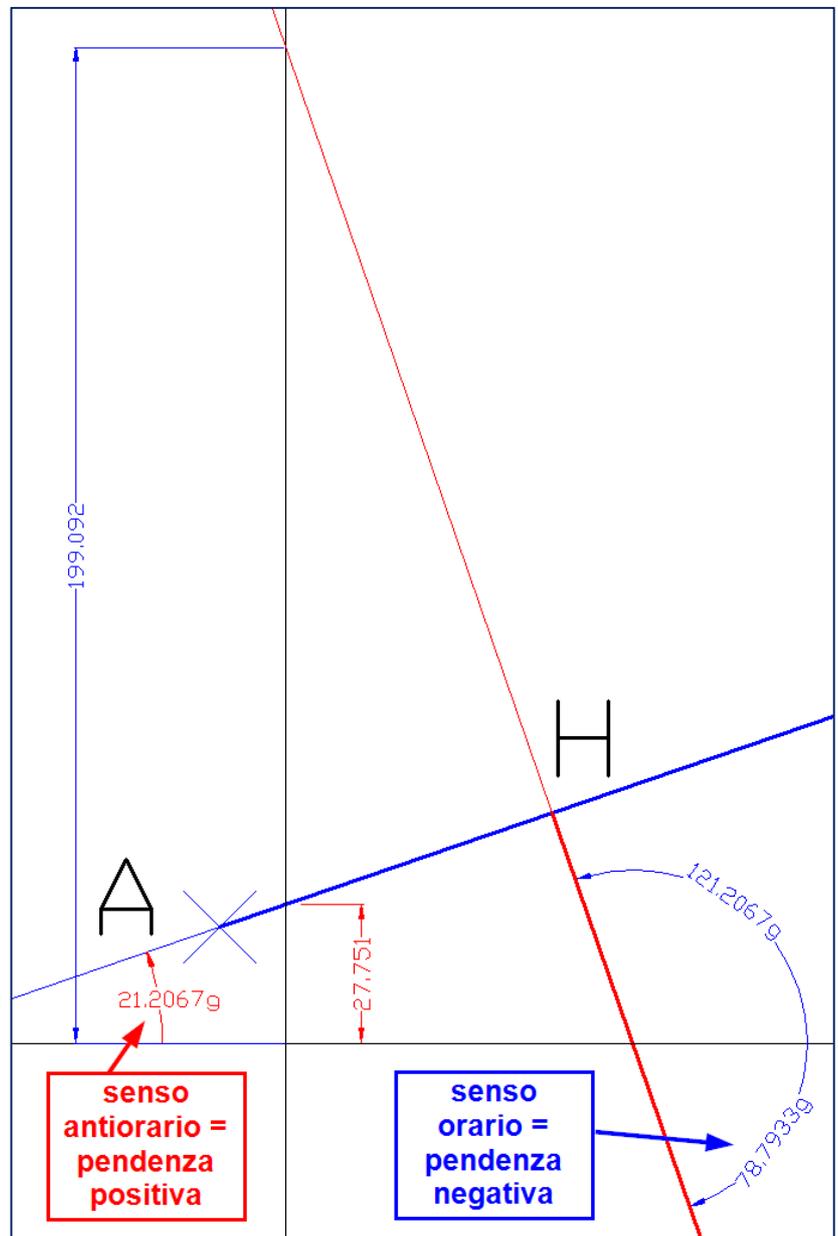


Figura 4 – La verifica dell'equazione della retta PH perpendicolare alla retta AB.

X gira in senso orario e in questo caso si dice che la retta ha *pendenza negativa* perché è inclinata verso sinistra rispetto all'asse Y (è decrescente da sinistra verso destra). In poche parole, la pendenza positiva o negativa di una retta corrisponde al segno, positivo o negativo, del suo coefficiente angolare.

Sempre in Figura 4 vediamo inoltre che dal disegno CAD ci risulta che anche la distanza tra l'origine degli assi e l'intersezione della retta PH con l'asse Y corrisponde al valore calcolato, ad eccezione di 2 mm (199.094 contro 199.092) dovuti unicamente ai diversi arrotondamenti tra il nostro calcolo algebrico e quelli applicati dal CAD. Tutto questo ci comprova che quanto sviluppato finora è corretto.

Tornando al nostro esempio, dobbiamo ora trovare le coordinate del punto H, piede della perpendicolare tracciata da P sulla retta AB, così da poter poi concludere il nostro calcolo trovando la distanza PH. Per fare questo seguiamo quanto spiegarci al corso (slide 19) mettendo in relazione tra loro le equazioni delle due rette sopra determinate:

retta AB	$y = 0.346 x + 27.751$
retta PH	$y = -2.89 x + 199.094$

Naturalmente le coordinate del punto di intersezione H dovranno soddisfare entrambe le equazioni, per cui ci basterà risolvere il sistema di 2 equazioni a 2 incognite, il che vale a dire, ricordando quanto spiegarci dal Prof. Maseroli al corso (slide 27 e 28), un sistema lineare in cui i vincoli (equazioni) sono pari ai gradi di libertà (incognite).

Data la semplicità delle due equazioni, potremmo anche risolvere il sistema con il classico procedimento algebrico, cioè ricavando una delle incognite dalla prima equazione e sostituendo con l'espressione ottenuta tale incognita nella seconda equazione. Ma lo scopo di questo documento è quello di esercitarsi su quanto appreso al corso, per cui vediamo di ottenere questo risultato applicando il calcolo matriciale.

Iniziamo con lo scrivere le due equazioni nella forma classica con le incognite a sinistra del segno di uguaglianza (e con la x prima della y) e i termini noti a destra:

$$-0.346 x + y = 27.751$$

$$2.89 x + y = 199.094$$

Come abbiamo visto al corso, costruiamo ora le tre matrici che ci servono: quella dei coefficienti (che chiamiamo A), quella delle incognite (X) e quella dei termini noti (T):

$$A = \begin{bmatrix} -0.346 & 1 \\ 2.89 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 27.751 \\ 199.094 \end{bmatrix}$$

Per chi lo desideri, sarà facile verificare come, eseguendo la moltiplicazione righe per colonne tra le matrici A e X si torni ad avere il sistema di equazioni di partenza. Quindi l'espressione matriciale del sistema, scritta in forma compatta, è:

$$A \cdot X = T$$

Dobbiamo quindi trovare la matrice inversa di A (che si indica con A^{-1}) di modo che applicando le regole viste al corso si ha che:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot T \quad I \cdot X = A^{-1} \cdot T \quad X = A^{-1} \cdot T$$

Dove I è la *matrice identità* che, come sappiamo, è l'elemento neutro della moltiplicazione tra matrici quadrate. E sappiamo anche che la matrice inversa esiste solo se la matrice di partenza non è *singolare*, cioè se ha il determinante diverso da zero. Verificare quest'ultima condizione in questo caso è molto semplice perché, trattandosi di una matrice 2×2 , il determinante si trova facilmente sottraendo dal prodotto degli elementi della diagonale principale il prodotto degli elementi dell'*anti-diagonale*, quindi nel nostro caso:

$$A = \begin{bmatrix} -0.346 & 1 \\ 2.89 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (-0.346 \cdot 1) - (1 \cdot 2.89)$$

$$\det(A) = -0.346 - 2.89 = -3.236$$

Dobbiamo ora trovare la matrice inversa di A e per farlo adotteremo il metodo dei *complementi algebrici* visti al corso (lezione 1). Questo procedimento consiste nel trovare il determinante di ciascuna sotto-matrice che si ottiene considerando ciascun elemento di ciascuna riga (oppure di ciascuna colonna) ed eliminando gli elementi che appartengono alla stessa riga e alla stessa colonna dell'elemento considerato. A tale determinante va quindi attribuito il segno dato da -1 elevato alla potenza di cui alla somma degli indici di riga e colonna dell'elemento stesso². I determinanti così calcolati, che sono per l'appunto i complementi algebrici della matrice, vanno messi in una seconda matrice nella posizione di cui all'elemento che li ha generati. Questa seconda matrice va quindi trasposta (scambiando le righe con le colonne) e moltiplicata per l'inverso del determinante della matrice di partenza.

Ma mi rendo conto che con una descrizione come quella appena scritta sembra tutto difficile (sia spiegarlo che capirlo), mentre invece tutto molto facile con un esempio concreto. Pertanto, con riferimento alla tabella che segue, sviluppiamo i passi sopra descritti.

Passo	Elemento considerato	Complemento algebrico
1	$A = \begin{bmatrix} \cancel{-0.346} & \cancel{1} \\ 2.89 & 1 \end{bmatrix}$	$A_{11} = -1^{1+1} \cdot 1 = 1$
2	$A = \begin{bmatrix} \cancel{-0.346} & \cancel{1} \\ 2.89 & 1 \end{bmatrix}$	$A_{12} = -1^{1+2} \cdot 2.89 = -2.89$
3	$A = \begin{bmatrix} \cancel{-0.346} & \cancel{1} \\ \cancel{2.89} & \cancel{1} \end{bmatrix}$	$A_{21} = -1^{2+1} \cdot 1 = -1$
4	$A = \begin{bmatrix} \cancel{-0.346} & \cancel{1} \\ \cancel{2.89} & \cancel{1} \end{bmatrix}$	$A_{22} = -1^{2+2} \cdot -0.346 = -0.346$

Passo 1:

- consideriamo la prima riga della matrice e il suo primo elemento A_{11} ;
- eliminiamo dalla matrice gli elementi appartenenti alla sua stessa riga e colonna;
- calcoliamo il determinante della sotto-matrice risultante, in questo caso pari all'unico elemento rimasto (matrice di ordine 1).

² In pratica, basta assumere che il segno è positivo se la somma dell'indice di riga più l'indice di colonna è pari, mentre sarà negativo se tale somma è dispari.

Passo 2:

- a) consideriamo ora il secondo elemento della prima riga della matrice: A_{12} ;
- b) eliminiamo dalla matrice gli elementi appartenenti alla sua stessa riga e colonna;
- c) calcoliamo il determinante della sotto-matrice risultante (unico elemento rimasto).

Passo 3:

- a) passiamo ora alla seconda riga di cui consideriamo il primo elemento A_{21} ;
- b) eliminiamo dalla matrice gli elementi appartenenti alla sua stessa riga e colonna;
- c) calcoliamo il determinante della sotto-matrice risultante.

Passo 4:

- a) consideriamo il secondo elemento della seconda riga della matrice: A_{22} ;
- b) eliminiamo dalla matrice gli elementi appartenenti alla sua riga/colonna;
- c) calcoliamo il determinante della sotto-matrice risultante.

Costruiamo quindi la matrice C dei complementi algebrici così trovati:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2.89 \\ -1 & -0.346 \end{bmatrix}$$

Troviamo la sua trasposta C^T invertendo le righe con le colonne:

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2.89 & -0.346 \end{bmatrix}$$

Infine calcoliamo la matrice inversa di A , cioè A^{-1} , moltiplicando l'inverso del determinante di A per C^T :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot C^T$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3.236} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2.89 & -0.346 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = -0.309 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2.89 & -0.346 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.309 & 0.309 \\ 0.893 & 0.107 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il vettore delle incognite X moltiplicando A^{-1} per il vettore dei termini noti T :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.309 & 0.309 \\ 0.893 & 0.107 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 27.751 \\ 199.094 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52.495 \\ 46.068 \end{bmatrix}$$

Le coordinate del punto H risultano quindi:

$$H \rightarrow x = 52.945 \quad y = 46.068$$

Come al solito, a verifica della correttezza di questo risultato, interroghiamo sul CAD le coordinate del punto H (Figura 5) e riscontriamo la corrispondenza dei valori, sempre con la differenza di 2 / 3 mm dovuti ai diversi arrotondamenti di calcolo.

Abbiamo quindi praticamente terminato il nostro compito perché, giunti a questo punto, non dobbiamo far altro che calcolare la distanza richiesta PH applicando il teorema di Pita-

gora alle coordinate dei due punti:

Punto	X	Y
P	118.202	-142.523
H	52.945	46.068

$$PH = \sqrt{(118.202 - 52.945)^2 + (-142.523 - 46.068)^2}$$

$$PH = 199.562$$

Risultato che andiamo a verificare sul CAD trovando la definitiva conferma al lavoro svolto (Figura 6).

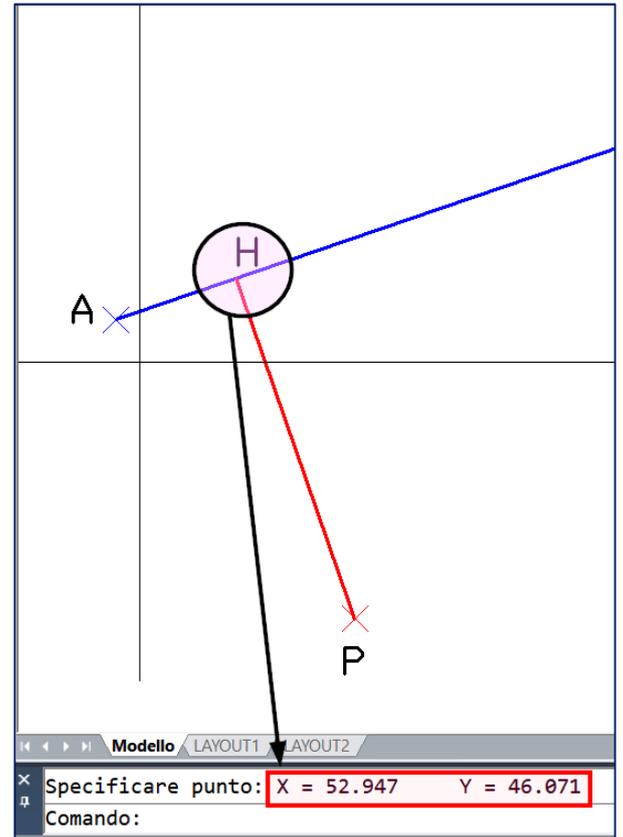
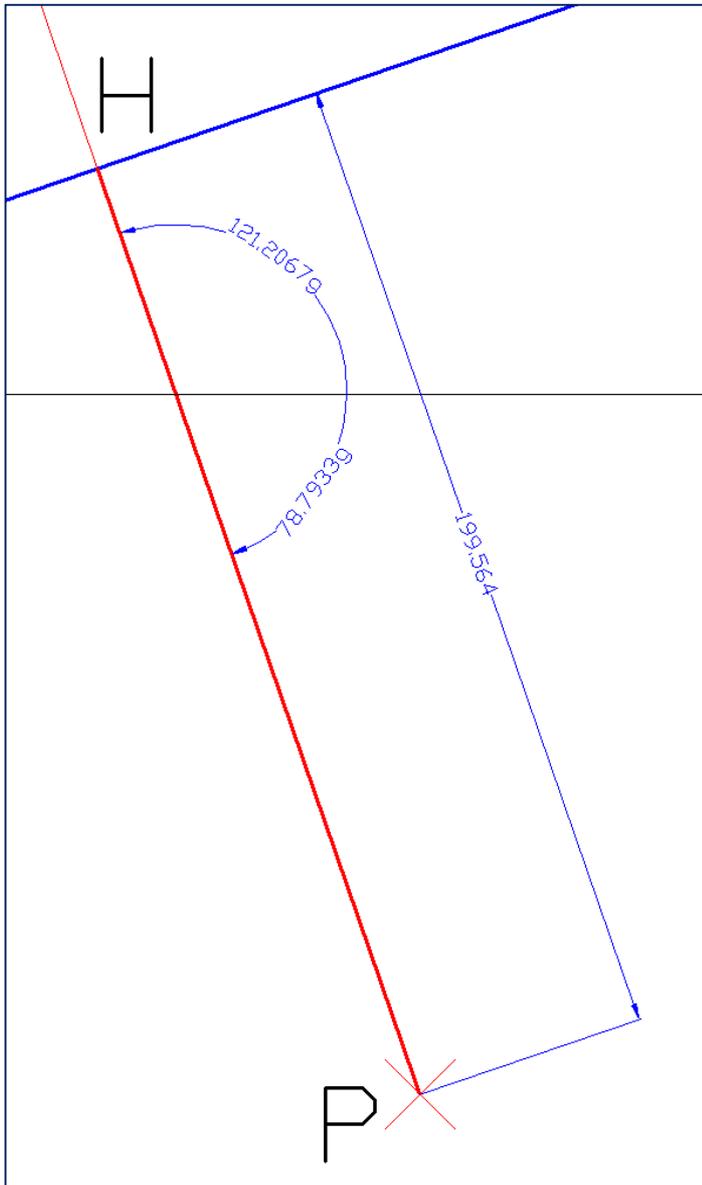


Figura 5 – (qui sopra) – Le coordinate indicate dal CAD corrispondono a quelle da noi calcolate.

Figura 6– (qui a lato) – La distanza cercata misurata sul CAD corrisponde a quella trovata dai calcoli.

2. Rototraslazione a 4 parametri mappa-rilievo

In questo secondo esempio sviluppiamo la rototraslazione a 4 parametri che il Prof. Maseroli ci ha spiegato nell'ultima parte della lezione 2 nell'ambito del tema *Trasformazione fra sistemi piani*. Questa procedura è una delle più utilizzate dai topografi perché nei loro lavori ricorre spesso la necessità di trasformare da un sistema di riferimento ad un altro le coordinate dei punti trattati. Nel caso di riconfinazione citato nella premessa di questo documento, ad esempio, al fine di ricostruire il confine, il tecnico doveva sovrapporre il rilievo alla mappa utilizzando i *punti di inquadramento*, cioè una serie di punti omologhi presenti sia in mappa che nella realtà. Il riconfinatore ha quindi reperito le coordinate cartografiche di detti punti direttamente dalla mappa, disponibile in formato raster (immagine), dopo averla opportunamente georeferenziata per correggerne la deformazione; ed ha poi eseguito il rilievo degli stessi punti presenti sul posto. La situazione di partenza di questo lavoro è quindi quella che si desume dalla tabella che segue: il tecnico ha disposizione ben 10 punti dei quali conosce le coordinate nei due sistemi di riferimento, quello locale del rilievo e quello cartografico della mappa (in questo caso Cassini-Soldner) e deve trasformare le coordinate del rilievo nei corrispondenti valori che queste assumono quando il sistema rilievo viene rototraslato nel sistema mappa. In questo modo, con il rilievo portato sul sistema mappa, gli diventerà facile calcolare i dati di tracciamento ai punti del confine (presenti solo sulla mappa) e ricostruire sul posto la linea cercata.

Punto	X rilievo	Y rilievo	E mappa	N mappa
1029	599.012	235.014	2145.367	1035.668
1030	573.764	237.967	2120.452	1038.570
108	-4.689	28.340	1542.351	828.049
109	-13.868	28.073	1532.852	827.661
205	-0.102	47.608	1546.792	847.111
702	305.983	289.601	1852.535	1089.377
703	319.894	288.740	1866.250	1088.178
704	294.623	318.883	1841.027	1118.300
705	282.798	327.641	1829.368	1127.230
1	-13.055	23.234	1533.870	823.410

Al corso (slide 35-38) abbiamo visto che per compiere questa trasformazione è sufficiente conoscere le coordinate di due punti in entrambi i sistemi e risolvere il seguente sistema di 4 equazioni (chiamiamo i punti 1 e 2 e indichiamo con x - y le coordinate nel sistema rilievo e con e - n le coordinate nel sistema mappa):

$$T_x + S \cos \alpha \ x_1 + S \sin \alpha \ y_1 = e_1$$

$$T_y - S \sin \alpha \ x_1 + S \cos \alpha \ y_1 = n_1$$

$$T_x + S \cos \alpha \ x_2 + S \sin \alpha \ y_2 = e_2$$

$$T_y - S \sin \alpha \ x_2 + S \cos \alpha \ y_2 = n_2$$

Dove:

- T_x e T_y sono le due traslazioni (nelle due direzioni degli assi) da applicare all'origine del sistema rilievo per portarlo nel sistema mappa.
- S è il fattore di scala, cioè il coefficiente che tiene in considerazione l'inevitabile difformità tra rilievo (realtà) e mappa (rappresentazione). In questo caso tale fattore, essendo unico, viene detto variazione *conforme* di scala, cioè una variazione, simile ad uno zoom, che mantiene inalterate le forme (*con-forme*) in quanto si ritiene che tra i due sistemi la difformità sia la stessa nelle due direzioni X-Y.
- α è l'angolo del quale il sistema rilievo è ruotato rispetto al sistema mappa.

La trasformazione si chiama "a 4 parametri" proprio perché è in funzione di questi 4 elementi appena descritti: due traslazioni, una rotazione e un fattore di scala.

Il sistema di equazioni di cui sopra, tuttavia, non è immediatamente risolvibile in quanto non *lineare*. Le equazioni presentano infatti le funzioni trigonometriche seno e coseno. Al corso abbiamo però visto che questo ostacolo può facilmente essere superato semplicemente sostituendo con due parametri letterali (a, b) i prodotti del fattore di scala per il seno/coseno come segue:

$$\begin{aligned} S \cos \alpha &= a \\ S \sin \alpha &= b \end{aligned} \quad [2]$$

Una volta risolto il sistema di equazioni per questi due parametri, potremo infatti risalire facilmente ai valori di S e α . Operata la sostituzione di cui sopra, il sistema *linearizzato* diventa:

$$\begin{aligned} T_x + a x_1 + b y_1 &= e_1 \\ T_y - b x_1 + a y_1 &= n_1 \\ T_x + a x_2 + b y_2 &= e_2 \\ T_y - b x_2 + a y_2 &= n_2 \end{aligned}$$

Volendo risolverlo con il calcolo matriciale, dobbiamo dapprima riordinare le equazioni in modo che i coefficienti delle incognite siano incolonnati. Per fare questo cambiamo di posto ai prodotti dei coefficienti $a-b$ per le incognite $x-y$, mentre sfalsiamo verticalmente le incognite T_x e T_y in quanto queste sono presenti ciascuna su due equazioni ma non sulle rimanenti due:

$$\begin{aligned} T_x &+ a x_1 + b y_1 = e_1 \\ &T_y + a y_1 - b x_1 = n_1 \\ T_x &+ a x_2 + b y_2 = e_2 \\ &T_y + a y_2 - b x_2 = n_2 \end{aligned}$$

Così facendo possiamo facilmente costruire la matrice A dei coefficienti, il vettore X delle incognite e il vettore T dei termini noti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & y_1 & -x_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & y_2 & -x_2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ a \\ b \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} e_1 \\ n_1 \\ e_2 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

È facile infatti verificare come, eseguendo la solita moltiplicazione righe per colonne tra la matrice A dei coefficienti e il vettore X delle incognite, si ottiene il sistema di equazioni di partenza.

Come già visto nell'esempio precedente, l'espressione matriciale compatta del sistema è:

$$A \cdot X = T$$

e si risolve trovando la matrice inversa di A (A^{-1}) così da avere che:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot T \quad I \cdot X = A^{-1} \cdot T \quad X = A^{-1} \cdot T$$

Nel caso che stiamo trattando, utilizziamo per il momento soltanto i primi due punti di inquadramento dei 10 di cui disponiamo, cioè i punti 1029 e 1030, aventi le seguenti coordinate:

Punto	X rilievo	Y rilievo	E mappa	N mappa
1029	599.012	235.014	2145.367	1035.668
1030	573.764	237.967	2120.452	1038.570

Per questi due punti la matrice A dei coefficienti e il vettore T dei termini noti diventano i seguenti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 599.012 & 235.014 \\ 0 & 1 & 235.014 & -599.012 \\ 1 & 0 & 573.764 & 237.967 \\ 0 & 1 & 237.967 & -573.764 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 2145.367 \\ 1035.668 \\ 2120.452 \\ 1038.570 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo quindi trovare la matrice inversa A^{-1} e per farlo, come sappiamo, dobbiamo dapprima verificare che non sia *singolare*, cioè che il suo determinante non sia pari a zero. In questo caso eseguiamo questa e le successive operazioni utilizzando Excel come ci ha insegnato il Prof. Maseroli al corso (si veda il file *Rototraslazione_4_parametri.xls* abbinato a questo documento). Il determinante della matrice A risulta essere:

$$\det(A) = -646.182$$

Non essendo quindi nullo, procediamo ad invertire la matrice ottenendo:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -21 & 12 & 22.331 & -11.920 \\ -12 & -21 & 11.920 & 22.331 \\ 0 & 0 & -0.039 & 0.005 \\ 0 & 0 & 0.005 & 0.039 \end{bmatrix}$$

Infine troviamo il vettore X delle incognite moltiplicando A^{-1} per il vettore T dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 & 12 & 22.331 & -11.920 \\ -12 & -21 & 11.920 & 22.331 \\ 0 & 0 & -0.039 & 0.005 \\ 0 & 0 & 0.005 & 0.039 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2145.367 \\ 1035.668 \\ 2120.452 \\ 1038.570 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1554.399 \\ 803.484 \\ 0.986756 \\ -0.000471 \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$T_x = 1554.399 \quad T_y = 803.484 \quad a = 0.986756 \quad b = -0.000471$$

Come già accennato, possiamo ora risalire dai coefficienti a - b ai valori effettivi di S e α rivedendo l'ultima slide (41) della lezione. Riprendiamo cioè le espressioni [2] a pag. 11 con le quali avevamo sostituito i prodotti del fattore di scala S con il seno ed il coseno di α :

$$S \cos \alpha = a$$

$$S \sin \alpha = b$$

Dividiamo la seconda equazione per la prima:

$$\frac{S \sin \alpha}{S \cos \alpha} = \frac{b}{a}$$

Semplificando S al primo membro e ricordando dalla trigonometria che:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

otteniamo che:

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad \alpha = \arctan \frac{b}{a}$$

Per cui con i risultati ottenuti, l'angolo α di rotazione tra il sistema rilievo e il sistema mappa risulta, espresso in radianti:

$$\alpha^r = \arctan \frac{-0.000471}{0.986756} = -0.000477$$

Valore che trasformiamo nella più familiare notazione in gradi centesimali applicando la proporzione:

$$-0.000477 : \pi = \alpha^g : 200$$

$$\alpha^g = -0.000477 \cdot \frac{200}{\pi} = -0.0304^g$$

Non deve stupire l'entità così contenuta di quest'angolo, dato che i due sistemi rototraslati sono entrambi orientati a Nord con l'unica differenza del diverso "modello di riferimento" (*datum*): WGS84 per il rilievo (eseguito con tecnologia GPS) e Cassini-Soldner per la mappa³.

Sempre con riferimento alle espressioni [2] a pag. 11, passiamo ora a calcolarci il fattore di scala S . Eleviamo al quadrato entrambi i membri:

$$S^2 \cos^2 \alpha = a^2$$

$$S^2 \sin^2 \alpha = b^2$$

Sommiamo membro a membro le due equazioni:

$$S^2 \cos^2 \alpha + S^2 \sin^2 \alpha = a^2 + b^2$$

Raccogliamo S^2 a sinistra dell'uguale:

$$S^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = a^2 + b^2$$

³ Tutti concetti che i Prof. Maseroli e Surace avranno modo di spiegarci al modulo 3 del corso.

Ricordando dalla trigonometria che:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Il tutto si semplifica in:

$$S^2 = a^2 + b^2$$

E quindi:

$$S = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0.986867^2 + 0.000484^2} = 0.986756$$

Questo risultato ci indica che, nel caso esaminato, e con i soli due punti di inquadramento presi in esame, la mappa risulta rimpicciolita rispetto alla realtà in quanto il fattore di scala è inferiore all'unità. Volendo darne una definizione più comprensibile, basta quindi considerare la differenza rispetto ad 1 ed esprimere il risultato in mt/km:

$$1 - 0.986756 = 0.013244 = 13.244 \text{ mt/km}$$

Per chi si occupa di riconfinazioni questo è evidentemente un risultato *osceno* che non permette di ricostruire il confine, basti pensare che la tolleranza prevista in letteratura tecnica per la variazione di scala è di soli 2 mt/km. Eppure, chi ha seguito il corso *Riconfinazioni, l'evoluzione delle tecniche risolutive* citato nella premessa di questo documento, ricorderà che la rototraslazione ottimale calcolata per questo lavoro aveva invece fornito un risultato molto buono:

$$1 - 0.999908 = 0.000092 = 0.092 \text{ mt/km} = 9.2 \text{ cm/km}$$

Come mai, allora, in questo nostro esempio abbiamo invece ottenuto un fattore di scala così *mostruoso*?

Per due motivi:

1. abbiamo considerato solamente 2 dei 10 punti di inquadramento cui disponevamo;
2. questi due punti sono anche molto vicini tra loro, come mostrato in Figura 7.

Il primo motivo ci riporta a quanto spiegato al corso dal Prof. Maseroli con la slide 28 circa la casistica di risoluzione dei sistemi lineari. Nel calcolo appena svolto, infatti, abbiamo risolto un sistema lineare *isodeterminato*, nel quale cioè il numero dei vincoli (equazioni) è pari a quello dei gradi di libertà (incognite). Si è dunque trattato di un procedimento che, pur avendoci fornito la soluzione del sistema (l'unica possibile), non ci ha evidenziato i potenziali errori intrinseci dei dati utilizzati, nel nostro caso le doppie coordinate mappa-rilievo dei due punti considerati. Né ci ha permesso di stimare la precisione delle misurazioni svolte (rilievo sul posto, prelievo delle coordinate dalla mappa).

In altre parole, con riferimento alle tecniche di riconfinazione, se uno o entrambi i due punti utilizzati fossero inattendibili (e con il risultato ottenuto lo sono di sicuro), noi non siamo in grado né di rendercene conto, né di stimare la loro inattendibilità (cioè lo scarto tra la loro mutua posizione mappa-realtà).

Il secondo motivo è che, come è facile intuire, essendo questi due punti molto vicini tra loro, la loro inattendibilità, cioè la differenza tra distanza mappa e distanza reale, incide in misura abnorme sul fattore di scala calcolato.

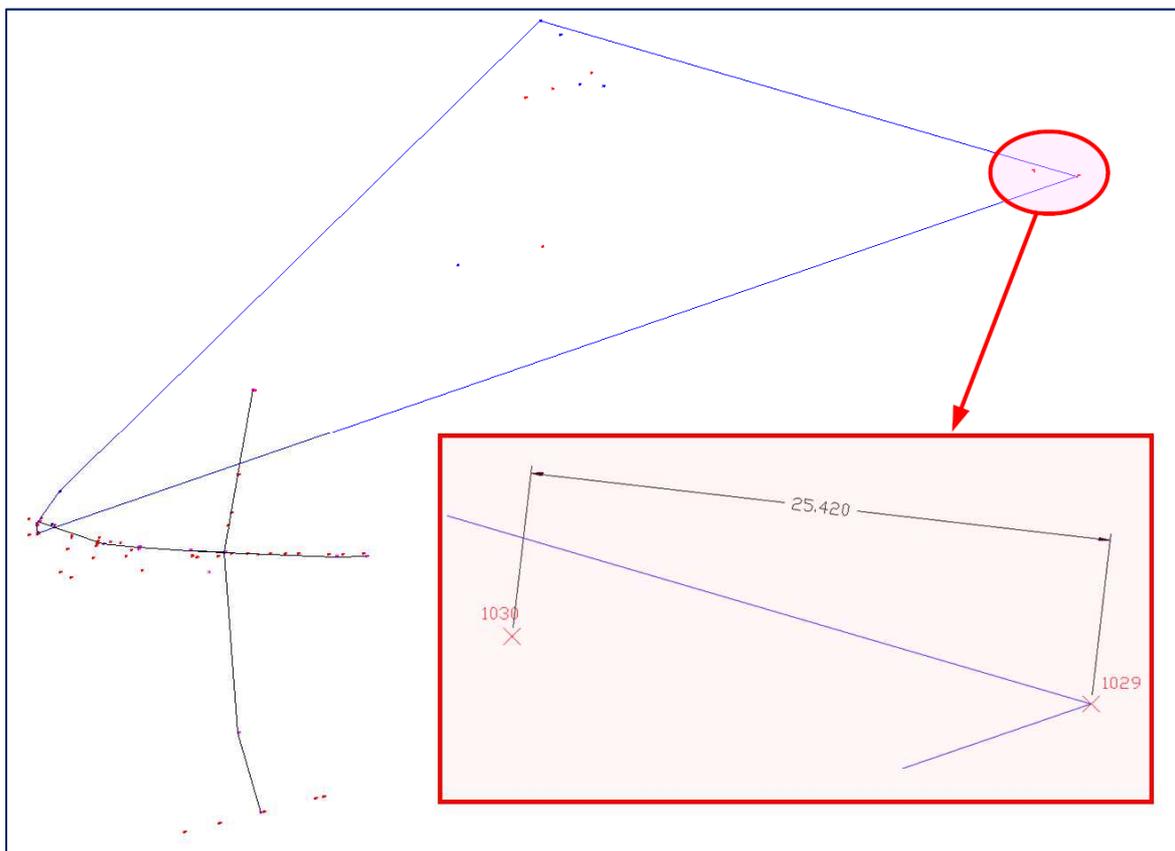


Figura 7 – I due punti di inquadramento considerati sono molto vicini tra loro, questo implica che la loro inattendibilità incida in misura abnorme nel calcolo del fattore di scala.

Per comprendere ancora meglio quanto possa essere fallace affidarsi a solo numero di misure strettamente necessario, ripetiamo ora la rototraslazione a 4 parametri prendendo sempre in considerazione due soli punti: il 1030 già utilizzato nel calcolo precedente ed il 205 ubicato all'estremità opposta del poligono di inquadramento, come evidenziato in Figura 8.

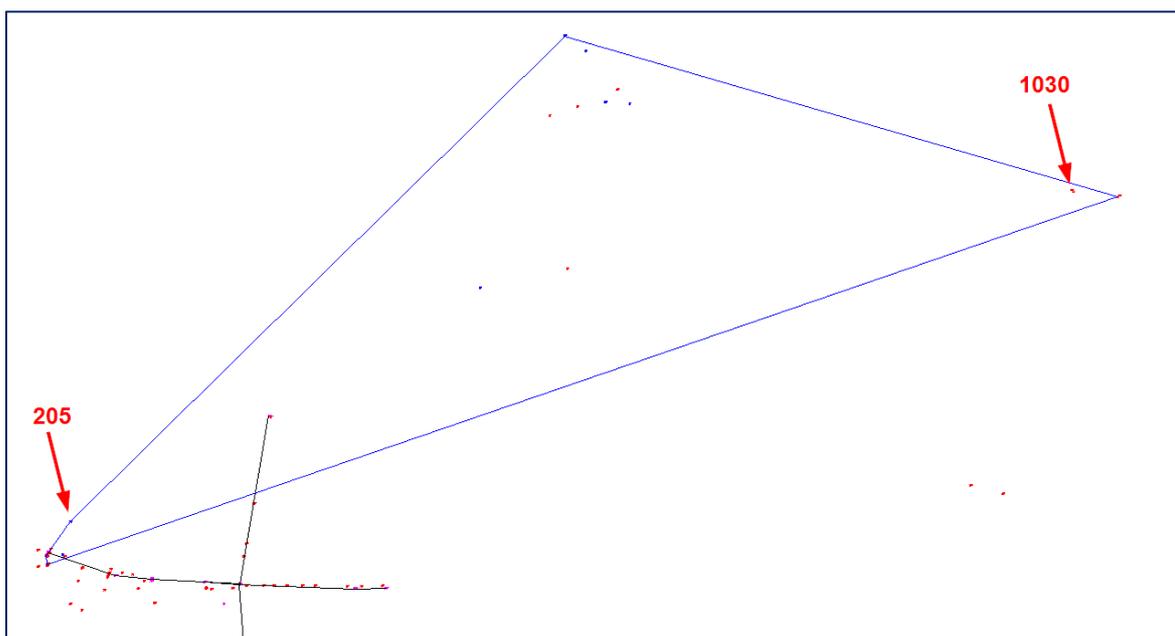


Figura 8 – I due nuovi punti sui quali svilupperemo nuovamente la rototraslazione a 4 parametri.

I due punti hanno le seguenti coordinate mappa-rilievo:

Punto	X rilievo	Y rilievo	E mappa	N mappa
1030	573.764	237.967	2120.452	1038.570
205	-0.102	47.608	1546.792	847.111

Costruiamo, come ormai sappiamo fare, la matrice A dei coefficienti e il vettore T dei termini noti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 573.764 & 237.967 \\ 0 & 1 & 237.967 & -573.764 \\ 1 & 0 & -0.102 & 47.608 \\ 0 & 1 & 47.608 & 0.102 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 2120.452 \\ 1038.570 \\ 1546.792 \\ 847.111 \end{bmatrix}$$

Troviamo con Excel sia il determinante che (se questo è positivo) la matrice inversa A^{-1} :

$$\det(A) = -419476.781$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.025 & -0.075 \\ 0 & 0 & 0.075 & 1.025 \\ 0 & 0 & -0.002 & -0.001 \\ 0 & 0 & -0.001 & -0.002 \end{bmatrix}$$

Infine troviamo il vettore X delle incognite moltiplicando A^{-1} per il vettore T dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.025 & -0.075 \\ 0 & 0 & 0.075 & 1.025 \\ 0 & 0 & -0.002 & -0.001 \\ 0 & 0 & -0.001 & -0.002 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2120.452 \\ 1038.570 \\ 1546.792 \\ 847.111 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1546.981 \\ 799.491 \\ 1.000249 \\ -0.001834 \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$T_x = 1546.981 \quad T_y = 799.491 \quad a = 1.000249 \quad b = -0.001834$$

Da cui, con le formule già viste, ricaviamo:

$$\alpha = \arctan \frac{b}{a} = \arctan \frac{-0.001834}{1.000249} = -0.001834^r = -0.1167^g$$

$$S = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1.000249^2 + (-0.001834)^2} = 1.000251$$

$$1.000251 - 1 = 0.00025 = 0.25 \text{ mt/km} = 25 \text{ cm/km}$$

Mettiamo ora a confronto i risultati delle due rototraslazioni eseguite:

Punti	T_x (mt)	T_y (mt)	S mt/km	α (g)
1029-1030	1554.399	803.484	13.244	-0.0304
1030-205	1546.981	799.491	0.25	-0.1167
Delta	7.418	3.993	12.994	0.0863

Come possiamo notare, le differenze sono fuori di ogni tolleranza:

- le due traslazioni differiscono di ben 7 e 4 metri,
- la variazione di scala differisce di ben 13 mt/km e passa da inferiore a superiore all'unità, il che significa che nel primo caso la mappa risulta più piccola della realtà, mentre nel secondo risulta più grande;
- la rotazione tra mappa e rilievo cambia in misura significativa.

Queste risultanze ci impongono le seguenti domande:

1. *A cosa è dovuta questa inaccettabile diversità di risultati?*

Ovviamente alle due diverse coppie di punti utilizzati per il calcolo, ciascuna delle quali fornisce un risultato completamente disgiunto dal risultato dell'altra.

2. *Quale delle due soluzioni dobbiamo considerare quella corretta?*

Nessuna delle due perché entrambe, come detto, non ci danno alcuna consapevolezza sull'attendibilità dei punti né sulla precisione delle misurazioni.

Tutto questo dimostra come, in topografia, sia estremamente pericoloso affidarsi alla sola quantità di misure appena sufficienti a rendere possibili i calcoli. Il problema si risolve con la ridondanza di misurazioni, una tecnica che permette di conseguire il pieno controllo sulla bontà del lavoro svolto. Naturalmente questo approccio ci porta a dover risolvere un sistema lineare in cui i vincoli (equazioni) sono in numero superiore ai gradi di libertà (incognite). Questo calcolo sarà oggetto delle prossime lezioni del corso.